

# ÉCOLE DOCTORALE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE



## Thèse

présentée en vue d'obtenir le grade de  
DOCTEUR DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Spécialité : Mathématiques Appliquées

par

**Camille CARVALHO**

---

### ÉTUDE MATHÉMATIQUE ET NUMÉRIQUE DE STRUCTURES PLASMONIQUES AVEC COINS.

---

Soutenue publiquement le 4 Décembre 2015 devant le jury composé de :

Anne-Sophie BONNET-BEN DHIA  
Tahar BOULMEZAOD  
Patrick CIARLET  
Stéphanie LOHRENGEL  
Serge NICAISE  
Karim RAMDANI  
Claire SCHEID

Directrice de thèse  
Rapporteur  
Co-directeur de thèse  
Rapporteuse  
Examinateur  
Examinateur  
Examinatrice





*Vis tecum sit.*



# REMERCIEMENTS

Comme le veut la tradition je commencerais par remercier mes directeurs de thèse, ou mes parents de recherche, Anne-Sophie et Patrick. Je n'ai pas les mots pour vous dire à quel point votre duo de choc a été essentiel ces trois dernières années pour réaliser cette thèse et pour faire de moi la personne que je suis aujourd'hui. Chacun à votre manière, par votre enthousiasme et votre générosité, vous m'avez beaucoup appris. Vous m'avez guidée tout en me laissant libre (de faire des bêtises), et vous avez toujours trouvé du temps pour discuter. Merci pour cette belle aventure scientifique et humaine, qui je l'espère continuera.

Merci à Lucas, toujours disponible pour répondre à mes questions et plein de nouvelles idées. Tu as été pour moi un véritable grand frère de recherche, qui m'a rassurée et avec qui je me suis chamaillée, mais c'est ça qui fait le charme de la famille scientifique que nous formons tous les quatre.

Je tiens à remercier Tahar Boulmezaoud et Stéphanie Lohrengel d'avoir rapporté ma thèse, pour votre travail minutieux malgré les contraintes de temps. Merci à Serge Nicaise, Karim Ramdani et Claire Scheid de me faire l'honneur de faire partie de mon jury de thèse.

Je remercie aussi Boris Gralak, Guillaume Demézy, André Nicolet et Frédéric Zolla de l'Institut Fresnel, pour nos discussions et échanges afin de mieux comprendre nos résultats et de les adapter à la communauté physicienne.

Merci à tous les membres de l'UMA pour m'avoir chaleureusement accueillie dans ce laboratoire où règnent la convivialité et la bonne humeur. Une pensée particulière pour Christophe M., Maurice, Nicolas K., Colin et Ha, la dream team de l'informatique et des rires à volonté sans qui nous serions tous perdus. Merci pour l'expertise GMSH, l'écoute et la disponibilité (et pour ne pas m'avoir mangée malgré les petites faims). Je remercie chaleureusement Annie, Sylvie-Anne, Hélène, Myriam, Katia et surtout Corinne, nos super assistantes, pour tout leur travail et leur aide dans les pénibles tâches administratives. Je remercie aussi Éric pour m'avoir accueillie dans le laboratoire. Je tiens à remercier Christophe H. pour son écoute et ses conseils dans les moments de doute, pour sa grande humanité tout simplement. Merci à Laurent pour savoir tendre et détendre l'atmosphère au coin café comme personne, à Sonia pour son immense gentillesse, ses conseils et ses bons plans parisiens, à Éliane pour sa générosité et pour toujours avoir le sourire, à Marc B. pour avoir régalié nos papilles à chaque retour de voyage, à Patrick J. pour sa pédagogie en plus de son incroyable talent pour oublier ses affaires aux quatre coins du monde, à Francesco pour nos discussions tôt le matin avant de commencer la journée, à Jérôme et Marie-Christine pour les psaumes et autres moments de convivialité au labo, et à Pierre pour la bataille menée sur les tasses de café. Je remercie Marc L. pour m'avoir donné l'opportunité de participer aux petites classes de son cours. Je remercie tout particulièrement Stéphanie et Jean-François pour tous leurs conseils dans la préparation des cours de MA 205 (malgré les tentatives de licenciements). Je remercie aussi Hasnaa pour m'avoir permis d'enseigner l'optimisation pendant ces trois années, pour sa générosité et son amitié. Enfin je remercie Frédéric, grand fournisseur de café du laboratoire, pour tous ses conseils lorsque j'étais étudiante et sans qui je n'aurais pas envisagé de faire

de thèse probablement. Merci aussi de m'avoir permis d'enseigner le cours sur les systèmes dynamiques avec autant de liberté.

Évidemment, je remercie tous les doctorants, post-doctorants, stagiaires passés et présents, dont la soutien quotidien et les moments de détente étaient plus que nécessaires. Merci aux grands sages Juliette, Sébastien, Nicolas C., Nicolas S., Giovanni, Bérangère, Martina, Cédric, Jameson, Anne-Claire et Aurore, à la "mafia italienne" que forment Athena, Christopher, Achille, Adriano, Elena, Luca, aux jeunes recrues Laure, Arnaud, Antoine B., Léandre, Zouhair, Sofia, Alicia, Kirill, à Elizaveta, Mohamed, Ismail, Jérémy F., Yves, Félix, Samuel et bien d'autres. Une pensée pour Maxence, qui a rythmé notre quotidien de ses marches circulaires dans notre bureau, pour son enthousiasme et son grand amour pour la gastronomie. Merci à Antoine T. pour sa gentillesse débordante et son aide en cas de problème sur ADUM, et à Audrey pour m'avoir fait découvrir plein de BDs. J'ai bien évidemment une grosse pensée pour mon cher co-bureau. Je crois qu'on peut résumer en une phrase : Mathieu, notre bureau de la victoire, c'était charisme. Merci à Geoffrey pour son aide pour les cadeaux d'anniversaire et de thèse, et pour apporter de l'originalité dans nos vies. Un gros merci à Anthony, camarade de promo, collègue de cours et partenaire de fabrication de gaufres, dont le sourire, la bonne humeur et le soutien ont été de véritables rayons de soleil pendant les moments difficiles. Je tiens à remercier tout particulièrement Simon, Valentin et Rémi, membres des 4 fantastiques, dont le soutien et la présence m'ont été plus que vitaux pendant la thèse. J'espère que notre amitié continuera encore longtemps. Merci pour toutes nos discussions, les verres, les jeux de mots pourris, la boîte à goûters, ce super voyage en Australie, les échanges de BDs et pour tout le reste. Merci aux super post-doc Maryna et Christian pour tous leurs conseils et leur sagesse, et pour s'être occupés de Valentin. Enfin je voudrais remercier Aliénor pour tous ses conseils pendant la thèse, son soutien et sa présence par un cheerleading intensif musical et animé pendant la période de rédaction, nos discussions sur les séries, musiques, dessins, expos et tatouages, et pour son amitié qui m'est très chère. Bubu, merci d'avoir cru en moi et de m'avoir fait découvrir les musiques de Glee (oui, il est temps d'assumer).

Je remercie Éric, Karine, André et Florent du club roller pour vos virées hebdomadaires, les slaloms, les sauts et les chutes. Merci à toute la communauté Strip Science et au Café des Sciences, avec une pensée pour Pierre Kerner et Karim Madjer pour m'avoir accueillie et permis de contribuer en dessins à des articles de vulgarisation scientifique via KidiScience, de découvrir des auteurs talentueux, et même de dédicacer au festiblog. Je remercie par ailleurs Juliette Leblond, pour ses encouragements et conseils tant pour la thèse que pour la bande dessinée, et pour être une grande fan de mon blog.

Et puis il y a les amis. Je pense en particulier à Laure, mon rocher depuis 10 ans maintenant, merci pour toutes nos balades culturelles pendant lesquelles on perdait la notion du temps, ton rire communicatif et pour ton intarissable curiosité lorsque je te parle de maths. J'espère que l'on continuera notre duo encore longtemps. Je remercie aussi Marie-Sophie et Leslie, pour l'accueil irlandais et les sessions studieuses (ou pas) ensemble. Je remercie les copains de prépa pour tout ce qu'ils m'ont apporté depuis Fermat. Merci à Laure pour les escapades entre filles ou sportives, à Raffy pour son enthousiasme et la prise de nouvelles régulière, à Xaxa pour les sessions roller (trop occasionnelles), à Nounoune pour être sur la même longueur d'onde culinaire, et à Monir, mon spin doctor depuis "les TDs du lundi". Je tiens à remercier particulièrement Antoine pour son soutien depuis toutes ces années (et pour l'exploit de continuer d'habiter à "200m" l'un de l'autre), pour savoir proposer de bonnes pâtes au pesto quand il le faut, et aussi à son Julien dont la joie de vivre et les crêpes n'ont pas été de trop. Et je n'oublie pas ma Cissou, miss rayures, dont l'enthousiasme et la disponibilité m'ont été précieux. Merci pour tous nos moments à nous, et puis je crois qu'il faut bien le dire, merci de m'avoir présenté les gens de la Maison du Bonheur et initiée à l'esprit cachanais. La Maison du Bonheur c'est un concentré de neuf scientifiques, neuf geeks, neuf personnes extraordinaires à travers qui j'ai eu un aperçu en avant

première de la thèse et qui m'ont adoptée après de long mois de parasitage. Merci à Félix pour les sonnets, à Elsa pour ses conseils, à Olivier pour le funk, à Pierre le blond pour le poisson en croûte de sel, et à Pierre le brun pour l'explication de la cuisson des petits pois. J'ai une pensée particulière pour JBen, dont les obscurs discours informatiques me sont de moins en moins étrangers, merci pour nos discussions, ton immense gentillesse et ton amitié. Merci à Matthias (entre autres pour ta confiaaaance, mais j'y reviendrai) et enfin merci à Émilien, grand ami, à la fois sociologue et physicien. Merci pour toutes nos discussions diverses et variées, tes réflexions sur le monde et ta présence, et pour notre super colocation dans le Paris trendy. Je remercie aussi Vincent pour m'avoir accueillie à Cachan et à Londres, pour amener un peu du Sud dans la grisaille parisienne, Johan, coloc temporaire, pour sa gentillesse et les conversations France Culture, et Carlotta pour ses encouragements et ses muffins sans oeufs.

Merci aux copains de l'ENSTA, la promo 2012, pour les after work et autres moments de retrouvailles. En particulier, je remercie Anne-Laure, Diane, Emmanuelle et Maïmouna, pour notre "club des 5" depuis 6 ans maintenant et pour nos voyages/repas réguliers. Merci pour tous ces moments de plaisir et de rigolade, qui je l'espère ne sont pas prêts de s'arrêter. Merci à Renaud et Claire pour les escapades londonniennes et autres sorties culturelles depuis le bon temps des Arts en Seine, merci d'être sur la même longueur d'ondes. Merci à Nast et Hélène pour les accueils norvégiens ou américains, et merci à Ximun pour ce concentré de joie. Merci aussi au club des thésards, à Julie, Manu, Mélissa, Rémi, Romain, Jo, Matthieu, à Aude-Ma, Adrien, Marie, Thibault, Yves et bien d'autres. Et puis merci à ma petite famille ENSTA (parce que ma famille c'est la mieux) pour cette belle tradition des repas de Noël, avec une grosse pensée pour Théau, Romain et Sofia. Merci pour le soutien et nos petits repas.

J'ai aussi une pensée pour M. Hannachi, M. Ménévis et M. Gissot, qui m'ont beaucoup appris en matière d'enseignement, et sans qui je n'aurais peut-être pas continué dans la voie des maths. Merci pour votre extraordinaire pédagogie et vos encouragements.

Merci à la famille Bussonnier-Chauvin-Macombe pour les escapades bretonnes, les discussions sur les musées et le Japon, votre gentillesse, l'écoute et les bons repas. C'est toujours un plaisir de venir vous voir, idéal pour faire une pause du rythme parisien.

Je remercie toute ma famille pour m'avoir soutenue de près ou de loin pendant la thèse. Une pensée particulière pour ma cousine Laura, du clan Roverselli-Darnaudet (merci pour les bols d'air niçois!), toujours curieuse et attentive à mes digressions scientifiques farfelues; pour mon oncle Alain qui dégage des énigmes de maths plus vite que son ombre, mon oncle Thierry qui pour passer le temps lit les thèses en ligne de l'Université Paul Sabatier, et "Mamie d'Agen" chez qui il est si bon de s'arrêter avant/après 5h de train. Enfin merci à mes parents, Bob et Sabine, pour m'avoir transmis la passion des maths et du dessin, pour m'avoir toujours soutenue, écoutée, réconfortée et encouragée dans tous mes choix depuis toujours. Je remercie mon petit frère Paco, bien que faisant 3 têtes de plus que moi, pour tous ses encouragements et réconforts entre deux piques.

Et puis je tiens à remercier Matthias, pour m'avoir supportée quotidiennement pendant ses périodes de stress et de doute lors de sa thèse, pour sa présence à toute heure pendant les miennes même à 9000 km de là, et pour être encore là à me supporter (malgré mon utilisation de Matlab et de sa colormap Jet). Même si je ne m'avouerais jamais geekette ni physicienne dans l'âme, je te remercie pour ton influence plus que bénéfique en tant que programmeur et physicien, pour nos discussions qui m'ont permis d'aboutir à cette thèse. Merci de toujours croire en moi, en nous deux, et de me pousser à entreprendre des choses que je pensais irréalisables. Tu me comprends mieux que personne et pour cela tu as ma reconnaissance à vie (plus quelques jours), il me faudra bien tout ce temps pour te donner tout ce que tu mérites et te rendre tout ce que tu m'as apporté depuis toutes ces années. Merci.





# TABLE DES MATIÈRES

Introduction générale	1
<b>Chapitre 1 Introduction : modélisation des plasmons de surface et étude mathématique des problèmes avec changement de signe</b>	<b>5</b>
Introduction	6
1.1 Équations de Maxwell et propriétés électromagnétiques des métaux	7
1.1.1 Lois constitutives des métaux (non magnétiques)	7
1.1.2 Le Modèle de Drude	8
1.2 Plasmons de surface aux interfaces métal-diélectrique	11
1.2.1 Équations de Maxwell en régime harmonique	11
1.2.2 Calcul des plasmons de surface pour le cas d'une seule interface : le guide planaire 2D	13
1.2.3 Cas de deux interfaces planes : couplage des plasmons de surface	15
1.2.4 Plasmons de surface dans les milieux dissipatifs	21
1.3 Étude mathématique de problèmes avec changement de signe	22
1.3.1 Problème type et cadre fonctionnel	22
1.3.2 Construction d'un opérateur $T$ pour un domaine symétrique	24
1.3.3 Construction des opérateurs $R, R'$	25
1.3.4 Le lien avec les plasmons de surface	28
1.3.5 La question des coins	29
 <b>Chapitre 2 Mesh requirements for the finite element approximation of problems with sign-changing coefficients</b>	 <b>31</b>
2.1 Introduction and setting of the problem	32
2.2 Historical background and motivation	33
2.3 T-coercivity and T-conforming meshes around corners	35
2.4 Well-posedness	40
2.5 Approximation by conforming discretizations	46
2.6 Numerical experiments	49

2.7	Concluding remarks . . . . .	50
2.A	Appendix . . . . .	52
2.A.1	General construction of $\mathbb{R}$ around corners . . . . .	52
2.A.2	Some technical results . . . . .	56
2.A.3	Uniform local Finite Element estimate . . . . .	58
2.B	Some extensions . . . . .	59
2.B.1	The treatment of curved interfaces . . . . .	59
2.B.2	Inf-sup condition with the T-coercivity and proof of theorem 2.1 . . . . .	60
<b>Chapitre 3 On the use of Perfectly Matched Layers at corners for scattering problems with sign-changing coefficients</b>		<b>65</b>
3.1	Introduction . . . . .	66
3.2	Setting of the problem . . . . .	68
3.2.1	The scattering problem with sign-changing permittivity . . . . .	68
3.2.2	Reduction to a bounded domain and description of the geometry . . . . .	69
3.2.3	Well-posedness in the classical framework for a contrast outside the critical interval	70
3.3	Singular solutions at one corner . . . . .	72
3.3.1	Characterization of singular exponents . . . . .	72
3.3.2	Oscillating singularities . . . . .	74
3.3.3	Selecting the outgoing solution I: energy trapped at the corner . . . . .	76
3.3.4	Selecting the outgoing solution II: limiting absorption principle . . . . .	78
3.3.5	A well-posed formulation of the scattering problem for a contrast inside the critical interval . . . . .	78
3.4	Approximation of the solution for a contrast inside the critical interval . . . . .	80
3.4.1	Analogy with a waveguide problem . . . . .	81
3.4.2	A new formulation of the scattering problem . . . . .	82
3.4.3	Numerical approximation . . . . .	84
3.4.4	Numerical experiments . . . . .	86
3.5	Discussion and prospects . . . . .	88
3.6	Annex . . . . .	90
3.6.1	Proof of Proposition 3.2 . . . . .	90
3.6.2	Proof of Lemma 3.4 . . . . .	91
3.6.3	Details of the proof of Lemma 3.3 . . . . .	91
3.A	Some extensions . . . . .	92
3.A.1	A more general proof of proposition 3.3 . . . . .	92
3.A.2	The particularity of the electrostatic like case . . . . .	94
<b>Chapitre 4 Guide d'ondes plasmonique scalaire</b>		<b>95</b>
	Introduction . . . . .	95
4.1	Cadre général : le guide fermé scalaire linéarisé . . . . .	97
4.1.1	Présentation du problème . . . . .	97
4.1.2	Formulation d'un problème de valeurs propres . . . . .	98
4.1.3	Résultats préliminaires et formulation variationnelle . . . . .	99
4.2	Cas d'un contraste hors intervalle critique . . . . .	101
4.2.1	Caractère auto-adjoint et résolvente compacte . . . . .	101
4.2.2	Conséquences sur le spectre . . . . .	102
4.2.3	Localisation des modes . . . . .	103
4.2.4	Calcul des modes guidés et relation de dispersion . . . . .	106

4.3	Analyse numérique hors intervalle critique : approximation par éléments finis des problèmes de valeurs propres avec changement de signe . . . . .	109
4.3.1	Résultats sur l'approximation des opérateurs compacts (auto-adjoints) . . . . .	109
4.3.2	Approximation du problème de valeurs propres . . . . .	110
4.3.3	Illustrations numériques : modes d'une cavité et maillages T-conformes . . . . .	113
4.4	Cas d'un contraste dans l'intervalle critique . . . . .	116
4.4.1	Extension non auto-adjointe . . . . .	117
4.4.2	Bilan d'énergie : tri des valeurs propres dans le plan complexe . . . . .	119
4.5	Approximation des valeurs propres pour un contraste dans l'intervalle critique . . . . .	121
4.5.1	Formulation du problème de valeurs propres sur le domaine découpé . . . . .	123
4.5.2	Illustrations numériques . . . . .	124
4.5.3	Conservation de l'énergie . . . . .	125
4.6	Retour au problème non linéaire . . . . .	126
4.7	Conclusion et perspectives . . . . .	129
4.7.1	Des modes à fuite dans les coins ? . . . . .	130
4.7.2	Le guide plasmonique ouvert . . . . .	132
<b>Chapitre 5 Guide d'ondes plasmonique Maxwell</b>		<b>137</b>
	Introduction . . . . .	137
5.1	Le guide plasmonique 2, 5D . . . . .	138
5.1.1	Notations et position du problème . . . . .	138
5.1.2	Formulation du problème de valeurs propres magnétique . . . . .	141
5.1.3	Approche variationnelle . . . . .	143
5.2	La T-coercivité pour Maxwell 2, 5D . . . . .	145
5.2.1	La T-coercivité pour $a_z$ . . . . .	146
5.2.2	La T-coercivité pour $a_{\perp}$ . . . . .	147
5.2.3	Retour au cas Maxwell 2, 5D . . . . .	148
5.3	Les modes guidés pour un contraste hors intervalle critique . . . . .	150
5.3.1	Caractère auto-adjoint et résolvante compacte . . . . .	150
5.3.2	Caractérisation du spectre . . . . .	151
5.4	Quelques remarques . . . . .	152



# INTRODUCTION GÉNÉRALE

Cette thèse s'inscrit dans la continuité des récentes avancées mathématiques dans le domaine de la plasmonique et des problèmes dits "avec changement de signe".

La plasmonique traite du comportement des ondes électromagnétiques à l'interface entre un métal et un diélectrique aux fréquences optiques (échelle nanométrique). Les propriétés électromagnétiques des matériaux sont caractérisées par deux paramètres, la permittivité diélectrique et la perméabilité magnétique. Aux fréquences optiques, les métaux possèdent –contrairement à la majorité des matériaux usuels– une permittivité diélectrique négative [77]. Ce changement de signe de permittivité entre un métal et un diélectrique confine les ondes électromagnétiques à l'interface entre les deux matériaux : ces ondes sont appelées plasmons de surface [96].

Les plasmons de surface suscitent un grand intérêt pour transmettre de l'information par la lumière (dans des guides d'ondes plasmoniques par exemple) afin d'améliorer les performances des dispositifs électroniques, dont la taille limite des composants a été atteinte. L'intérêt est donc de dépasser la limite de diffraction, et les applications de la plasmonique sont grandissantes, comme à terme la construction de nouvelles puces d'ordinateur, la construction d'antennes optiques, l'imagerie haute résolution en champ proche, la microscopie de photoémission d'électrons, et bien d'autres [5, 135, 96, 134]. Une grande difficulté est que les plasmons de surface sont très sensibles à la moindre irrégularité de l'interface entre le métal et le diélectrique. C'est en partie cette sensibilité qui motive cette thèse.

Étant données les petites échelles auxquelles se produisent ces phénomènes plasmoniques, les expériences sont encore difficiles et très coûteuses. Par ailleurs, à cause du changement de signe de permittivité à la traversée métal-diélectrique, l'étude mathématique de ces ondes ne relève pas de la théorie classique des guides d'ondes, et les méthodes numériques habituelles pour simuler les problèmes de propagation en électromagnétisme échouent.

De ce constat, sont nés de nombreux travaux mathématiques sur le sujet, motivés de façon plus générale par l'étude des matériaux dit négatifs, dont font partie les métaux mais aussi les célèbres métamatériaux (à indice négatif). Les métamatériaux sont des matériaux artificiels construits par un agencement périodique de matériaux usuels de petite taille par rapport à la longueur d'onde de travail, dont on peut moduler des propriétés électromagnétiques effectives. Les métamatériaux à indice négatif par exemple possèdent une permittivité et une perméabilité négatives. S'il ne fallait citer qu'une seule application des métamatériaux, cela serait la construction de capes d'invisibilité, déviant les rayons lumineux et rendant ainsi un objet invisible (l'équipe de X. Zhang, précurseuse dans le domaine, y est tout récemment parvenue dans le domaine du visible pour une fine couche de métamatériaux [104]).

L'étude des métamatériaux à indice négatif est en particulier motivée par la construction de lentilles "parfaites", dans le sens où elles ne sont plus soumises à la limite de diffraction [114].

À notre connaissance, on trouve un premier résultat sur l'étude des problèmes en électromagnétisme dans des milieux composés d'un matériau usuel dit positif et d'un matériau négatif – problèmes que nous appelons problèmes avec changement de signe – dans le papier de M. Costabel et E. Stephan en 1985 [54], utilisant des techniques de représentations intégrales. Dans l'équipe POEMS, ce type de problème a vu le jour avec la thèse de K. Ramdani [119] encadrée par Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia en 1999 sur les lignes supraconductrices. Pendant cette même période M. Dauge et B. Texier contribuent à la compréhension des phénomènes singuliers apparaissant lorsque l'interface présente des coins [56]. C'est avec la thèse de C.M. Zwölf en 2008 [137] encadrée par Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia et Patrick Ciarlet que l'étude des problèmes avec changement de signe prend un tournant, introduisant la méthode de la T-coercivité. Cette technique permet de retrouver, sous certaines conditions, un cadre usuel où les outils d'analyse fonctionnelle sont applicables et où l'on peut justifier la convergence des méthodes numériques. Par la suite G. Oliveri, M. Raffetto et P. Fernandes (par exemple [109, 62]) proposent des conditions nécessaires pour justifier la convergence des méthodes numériques en présence de métamatériaux. La thèse de L. Chesnel en 2012 [38] encadrée par Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia et Patrick Ciarlet a ensuite considérablement contribué à élucider de nombreuses questions théoriques pour des configurations académiques. La grande nouveauté est que les conditions citées précédemment sont maintenant explicites : si le rapport des valeurs des permittivités de chaque milieu – que l'on appelle contraste – n'appartient pas à intervalle critique, dont les bornes dépendent de la géométrie de l'interface entre les milieux, alors les techniques usuelles fonctionnent. Dans le cas d'une interface plane, la convergence des méthodes éléments finis est assurée dès lors que le contraste n'est pas dans cet intervalle réduit au singleton  $-1$ , et que le maillage est symétrique au voisinage de l'interface. Lorsque le contraste appartient à l'intervalle critique, le cadre classique n'est plus suffisant à cause de l'apparition de singularités aux coins. Dans ce cas on doit travailler dans un cadre fonctionnel qui prend en compte ces singularités, utilisant la théorie de Kondratiev. Nous mentionnons que dans le même temps le travail de S. Nicaise et J. Venel [105] améliore les résultats d'approximation proposés dans [22], et proposent aussi pour le cas d'un angle droit une règle de maillage qui assure la convergence.

Fort de cette dynamique, de nouvelles questions se sont posées au sein de l'équipe POEMS, portant sur les problèmes d'interface entre un matériau négatif et un matériau positif. C'est dans ce contexte qu'a été créé le projet ANR METAMATH, dirigé par Sonia Fliss, dans lequel s'inscrit cette thèse.

Les objectifs de cette thèse sont d'étudier à la suite des travaux de L. Chesnel, en régime fréquentiel et pour le cas bidimensionnel, des problèmes avec changement de signe plus réalistes comme la diffraction d'une onde plane par une inclusion métallique polygonale ou la recherche de modes guidés dans un guide d'ondes plasmonique, et de proposer une méthode numérique stable pour notamment le traitement des singularités de coins.

Cette thèse comporte cinq chapitres qui s'organisent comme suit.

★ **Chapitre 1** : le premier chapitre est un chapitre introductif présentant la modélisation des plasmons de surface, leur comportement dans des configurations "simples", ainsi qu'une introduction à la méthode de la T-coercivité que nous utiliserons tout au long de cette thèse.

★ **Chapitre 2** : nous abordons les questions de discrétisation d'un problème scalaire de transmission entre un métal et un diélectrique, pour une interface polygonale, hors intervalle critique. L'idée est

d'étendre les résultats de [105, 40] pour le traitement des coins, en fournissant des règles de maillage pour assurer la convergence optimale des éléments finis. On parle de maillages T-conformes, utilisant la T-coercivité au niveau discret. Ce chapitre est rédigé en anglais et fait l'objet d'une publication (cf. [13]). Quelques résultats complémentaires sont proposés en fin de chapitre.

★ **Chapitre 3** : ce chapitre est dédié à l'étude d'un problème de diffraction 2D par une onde plane d'une inclusion métallique polygonale. Lorsque le contraste est choisi hors de l'intervalle critique, on montre que le problème est bien posé dans les espaces classiques et les méthodes éléments finis convergent. Les difficultés arrivent lorsque le contraste est dans l'intervalle critique, avec l'apparition de singularités aux coins de l'inclusion. Dans ce cas les méthodes éléments finis classiques échouent pour approcher la solution. À partir des résultats de [18] présentés pour une géométrie particulière, nous étudions ces singularités pour un coin d'angle quelconque et donnons un critère systématique pour sélectionner les singularités dites "sortantes". Ces singularités sont appelées ondes de trou noir, et elles transportent de l'énergie absorbée par les coins. Nous proposons une méthode numérique originale pour capturer ces singularités aux coins : nous transformons un voisinage de chaque coin en un domaine non borné (en dilatant la composante radiale) puis nous utilisons des PMLs (Perfectly Matched Layers). Cette technique peut se voir comme le procédé inverse utilisé pour les éléments finis inversés [28]. Ce chapitre est rédigé en anglais et fait l'objet d'une publication (cf. [12]). Quelques résultats complémentaires sont proposés en fin de chapitre.

★ **Chapitre 4** : dans ce chapitre nous cherchons les modes guidés d'un guide d'ondes plasmonique "scalaire" à section bornée. Ce problème peut se formuler sous la forme d'un problème de valeurs propres scalaire avec changement de signe dans la section du guide. Lorsque le contraste est choisi hors intervalle critique, on montre que l'opérateur associé est auto-adjoint et à résolvante compacte. En utilisant les résultats d'analyse numérique du chapitre 2, et les techniques d'approximation des valeurs propres pour les opérateurs compacts [110, 4] nous montrons que nous pouvons approcher les valeurs propres tout en assurant qu'il n'y a pas de pollution spectrale. Nous y illustrons, comme au chapitre 2, l'importance des maillages T-conformes pour garantir la convergence. Lorsque le contraste est choisi dans l'intervalle critique, à cause des ondes de trou noir l'opérateur n'est ni auto-adjoint ni à résolvante compacte. Nous étendons le domaine de l'opérateur en prenant en compte ces singularités, ce qui nous permet de trier les valeurs propres dans le plan complexe. En utilisant la méthode développée au chapitre 3 c'est-à-dire en utilisant des PMLs aux coins nous pouvons approcher les valeurs propres associées aux modes guidés.

★ **Chapitre 5** : le dernier chapitre porte sur le guide d'ondes plasmonique gouverné par les équations de Maxwell. Nous montrons le caractère auto-adjoint et à résolvante compacte de l'opérateur associé en utilisant la méthode de la T-coercivité. Cette méthode a été développée pour les problèmes scalaires [15] et pour les équations de Maxwell 2D [16], nous adaptons ces résultats pour notre cas, appelé 2.5D (problème 2D mettant en jeu les trois composantes des champs).

Au cours de ce travail, nous avons eu de nombreuses discussions avec l'Institut Fresnel à Marseille (laboratoire de physique) nous permettant d'interpréter physiquement nos résultats. En même temps que ce travail, J. Viquerat a effectué sa thèse sous la direction de S. Lantéri et C. Scheid [131] au sein de l'équipe NACHOS, et a développé une méthode numérique Galerkin discontinue en régime temporel pour des cas physiques en plasmonique. Nous avons eu l'occasion de discuter avec C. Scheid dans l'idée à terme de comparer, sur un cas test commun, nos résultats afin d'observer si le régime périodique est bien établi.





# CHAPITRE

## 1

# INTRODUCTION : MODÉLISATION DES PLASMONS DE SURFACE ET ÉTUDE MATHÉMATIQUE DES PROBLÈMES AVEC CHANGEMENT DE SIGNE

## Sommaire

---

<b>Introduction</b> . . . . .	<b>6</b>
<b>1.1 Équations de Maxwell et propriétés électromagnétiques des métaux</b> . . . . .	<b>7</b>
1.1.1 Lois constitutives des métaux (non magnétiques) . . . . .	7
1.1.2 Le Modèle de Drude . . . . .	8
<b>1.2 Plasmons de surface aux interfaces métal-diélectrique</b> . . . . .	<b>11</b>
1.2.1 Équations de Maxwell en régime harmonique . . . . .	11
1.2.2 Calcul des plasmons de surface pour le cas d'une seule interface : le guide planaire 2D . . . . .	13
1.2.3 Cas de deux interfaces planes : couplage des plasmons de surface . . . . .	15
1.2.4 Plasmons de surface dans les milieux dissipatifs . . . . .	21
<b>1.3 Étude mathématique de problèmes avec changement de signe</b> . . . . .	<b>22</b>
1.3.1 Problème type et cadre fonctionnel . . . . .	22
1.3.2 Construction d'un opérateur T pour un domaine symétrique . . . . .	24
1.3.3 Construction des opérateurs $R, R'$ . . . . .	25
1.3.4 Le lien avec les plasmons de surface . . . . .	28
1.3.5 La question des coins . . . . .	29

---

## Introduction

Nous commençons par un chapitre introductif aux deux grands concepts qui forment la base de cette thèse : les plasmons de surface et la théorie de la T-coercivité. Nous l'avons mentionné dans l'introduction générale, les plasmons de surface sont des ondes électromagnétiques particulières se propageant aux interfaces métal-diélectrique (en particulier à la surface d'un métal dans le vide). Ceci n'est possible que si les deux matériaux présentent des permittivités avec une partie réelle de signes différents, ce qui se produit pour certaines longueurs d'ondes. Il nous apparaît essentiel de comprendre la nature de ces ondes pour proposer un modèle mathématique adéquat. Mais pour cela, il nous faut présenter tout d'abord quelques aspects de modélisation physique des propriétés électromagnétiques (permittivité diélectrique, perméabilité magnétique) particulières des métaux, grâce auxquelles ces plasmons peuvent exister. Ceci constitue la première partie de ce chapitre. Bien sûr, ceci n'est qu'une introduction, nous conseillons au lecteur de consulter entre autres le bel ouvrage de Stephan Maier [96], ou le livre de David Jackson [77] pour une meilleure compréhension de la physique des ondes électromagnétiques (et des plasmons), dont nous nous sommes inspirés.

Comme nous le rappelons dans ce chapitre, l'étude des plasmons de surface pour des problèmes régis par les équations de Maxwell en régime harmonique dans un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  peut se ramener à des problèmes d'inconnue scalaire de la forme

$$\left| \text{Trouver } u \text{ tel que } \operatorname{div}(\sigma \nabla u) + \omega^2 \varsigma u = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad + \text{ condition aux limites, } \int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\Omega < \infty. \right.$$

La paire  $(\sigma, \varsigma)$  met en jeu la permittivité et la perméabilité du milieu – à savoir la paire  $(\varepsilon^{-1}, \mu)$  ou  $(\mu^{-1}, \varepsilon)$  – l'inconnue  $u$  dénote une composante du champ magnétique ou électrique, et  $\omega$  la fréquence. La dernière condition est équivalente à imposer les solutions d'énergie finie. La question de l'existence et de l'unicité de la solution devient complexe lorsque  $\sigma$  change de signe, ce qui peut être le cas lorsque  $\Omega$  est composé d'un métal (et d'un diélectrique). Ceci vient du fait que la forme bilinéaire associée  $(u, v) \mapsto \int_{\Omega} \sigma \nabla u \cdot \overline{\nabla v}$  n'est plus coercive. De tels problèmes ont déjà été étudiés depuis plus d'une dizaine d'années, et ceci a donné naissance à la méthode de T-coercivité, qui permet de récupérer le caractère coercif d'une forme bilinéaire équivalente. Cependant ceci a un prix et ce résultat n'est valide que sous certaines conditions, que nous allons préciser par la suite. Comme cette approche sera utilisée tout au long de la thèse, nous présentons son application dans quelques cas simples. Ceci fait l'objet de la seconde partie de ce chapitre.

Les objectifs sont donc les suivants : mettre en lumière les enjeux de modélisation des plasmons de surface et présenter un outil mathématique fondamental pour l'étude des problèmes avec changement de signe.

Le chapitre s'organise comme suit : dans un premier temps nous présentons les propriétés électromagnétiques des métaux. Pour cela nous rappelons les équations de Maxwell, ainsi que les lois constitutives des métaux. Nous présentons ensuite un modèle simple de loi pour la permittivité des métaux : le modèle de Drude. Nous proposons plusieurs commentaires quant à la validité de celui-ci, ainsi que sur les autres modèles existants de permittivité. Nous verrons alors que la permittivité peut être modélisée par une fonction à valeurs complexes de la fréquence, ce qui caractérise un milieu dispersif. Afin de se familiariser petit à petit avec les plasmons de surface, dans la seconde partie nous allons étudier leur expression et leur comportement dans des géométries simples. Nous calculerons les plasmons de surface (s'ils existent) pour un guide d'ondes planaire métal-diélectrique, puis pour

un guide diélectrique-métal-diélectrique (et métal-diélectrique-métal). Dans le cas de deux interfaces, des modes couplés apparaissent, dont les propriétés électromagnétiques diffèrent de celles d'un plasmon seul. Nous commentons aussi le comportement des plasmons de surface lorsque l'un des milieux est dissipatif. Enfin, la troisième partie, plus mathématique, est une présentation de la méthode de T-coercivité. Nous présenterons d'abord un cas simple puis la démarche générale. Nous présenterons seulement les résultats pour le problème exact, les questions ayant trait au problème approché (obtenu après discrétisation) seront quant à elles étudiées dans le chapitre suivant. Nous ferons ensuite un paragraphe mettant en correspondance tous les résultats présentés dans ce chapitre, à savoir les résultats mathématiques obtenus via la T-coercivité et le comportement des plasmons de surface. Pour les problèmes avec changement de signe, la géométrie de l'interface entre les deux matériaux joue un rôle central, notamment la présence de coins ou pointes. Leur traitement est abordé en fin de chapitre.

## 1.1 Équations de Maxwell et propriétés électromagnétiques des métaux

### 1.1.1 Lois constitutives des métaux (non magnétiques)

Considérons un métal occupant un ouvert  $\mathcal{O}$  de l'espace  $\mathbb{R}^3$ . De façon classique, les champs électromagnétiques sont représentés par quatre fonctionnelles dépendant des variables spatiales et temporelles  $(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{O} \times \mathbb{R}$  : le champ électrique  $\underline{\mathbf{E}}$ , le champ magnétique  $\underline{\mathbf{H}}$ , le déplacement électrique  $\underline{\mathbf{D}}$  et l'induction magnétique  $\underline{\mathbf{B}}$ . Ces fonctionnelles sont solutions des équations de Maxwell :

$$\begin{aligned} \partial_t \underline{\mathbf{D}} - \text{rot } \underline{\mathbf{H}} &= -\underline{\mathbf{J}}, \\ \partial_t \underline{\mathbf{B}} + \text{rot } \underline{\mathbf{E}} &= 0, \\ \text{div } \underline{\mathbf{D}} &= \rho, \\ \text{div } \underline{\mathbf{B}} &= 0, \end{aligned} \tag{1.1}$$

où  $\rho$  est la densité de charges électrostatiques, et  $\underline{\mathbf{J}}$  la densité de courant. Rajoutons qu'il existe d'autres champs dits auxiliaires, qui dépendent des champs et déplacements électriques, respectivement des champs et inductions magnétiques, comme la polarisation  $\underline{\mathbf{P}}$  :

$$\underline{\mathbf{P}} = \underline{\mathbf{D}} - \varepsilon_0 \underline{\mathbf{E}}, \tag{1.2}$$

où la constante  $\varepsilon_0$  correspond à la permittivité diélectrique du vide, considérée comme la constante de référence. L'avantage d'utiliser ce champ auxiliaire est la prise en compte de tous les champs induits (par une source extérieure, et interne au système).

Les équations ci-dessus ne suffisent pas à elles-seules pour caractériser entièrement les champs. En effet, il nous faut prendre en compte les propriétés du milieu dans lequel ils évoluent, ce qui est fait par le biais de relations constitutives (voir par exemple [77]). Nous étudierons dans la suite uniquement la propagation des champs électromagnétiques dans des milieux linéaires, isotropes et non magnétiques, ce qui nous restreint à un sous-ensemble des métaux (typiquement les métaux alcalins, ou nobles comme l'argent et l'or). Les relations constitutives qui caractérisent ces matériaux relient alors le déplacement électrique au champ électrique, et l'induction magnétique au champ magnétique, ce qui s'écrit facilement en régime fréquentiel [77, Chapitre 6] comme suit :

$$\underline{\mathbf{D}}(\mathbf{x}, \omega) = \varepsilon_0 \varepsilon_r(\omega) \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, \omega), \quad \underline{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, \omega) = \mu_0 \mu_r(\omega) \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, \omega) \quad \forall (\mathbf{x}, \omega) \in \mathcal{O} \times \mathbb{R}. \tag{1.3}$$

Ci-dessus, les champs  $\underline{\mathbf{D}}$ ,  $\underline{\mathbf{E}}$ ,  $\underline{\mathbf{B}}$ ,  $\underline{\mathbf{H}}$  représentent les transformées de Fourier en temps des champs  $\underline{\mathbf{D}}$ ,  $\underline{\mathbf{E}}$ ,  $\underline{\mathbf{B}}$ ,  $\underline{\mathbf{H}}$ . Dans toute la suite on se restreint à  $\omega \geq 0$  (nous justifions ce choix en fin de section) : les

transformées de Fourier en temps sont des transformations causales et  $\omega \geq 0$  est une fréquence. La constante  $\mu_0$  correspond à la perméabilité magnétique du vide, considérée comme une constante de référence. Les fonctions  $\varepsilon_r$  et  $\mu_r$  sont respectivement appelées permittivité relative et perméabilité relative, ce sont en général des fonctions de la fréquence  $\omega$ . On parle alors de milieux dispersifs. Les quantités  $\varepsilon_0\varepsilon_r$ ,  $\mu_0\mu_r$  forment respectivement la permittivité et la perméabilité du matériau. Comme nous ne considérons que des matériaux non magnétiques, la perméabilité relative est constante ( $\mu_r \equiv 1$ ) [78, 58].

**Remarque 1.1.** *Pour les milieux linéaires non dispersifs (comme le vide, l'air) les relations constitutives s'écrivent :*

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}, \omega) = \varepsilon_0\varepsilon_r\mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega), \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}, \omega) = \mu_0\mu_r\mathbf{H}(\mathbf{x}, \omega) \quad \forall(\mathbf{x}, \omega) \in \mathcal{O} \times \mathbb{R}^+, \quad (1.4)$$

où la permittivité relative  $\varepsilon_r$  et la perméabilité relative  $\mu_r$  sont des constantes.

**Remarque 1.2.** *Notons que l'équation (1.2) est aussi satisfaite par  $\mathbf{P}$  la transformée de Fourier de  $\underline{\mathbf{P}}$  :  $\mathbf{P} = \mathbf{D} - \varepsilon_0\mathbf{E}$ .*

Comment se comportent les ondes électromagnétiques dans les métaux? Dans la gamme de fréquences associées au domaine du visible, le modèle du conducteur parfait est souvent une bonne approximation pour les métaux. En effet, nous pouvons observer au quotidien que la lumière ne passe pas à travers les métaux, et que ces derniers réfléchissent la lumière. À plus basse fréquence, pour des longueurs d'ondes dans l'infra-rouge, le champ pénètre de plus en plus dans le métal. Ceci conduit à des pertes d'énergie de plus en plus fortes correspondant à l'effet Joule. À haute fréquence, pour des longueurs d'ondes dans le domaine ultra-violet, les métaux se comportent comme des diélectriques (isolants électriques) permettant la propagation des ondes électromagnétiques. Entre ces deux comportements extrêmes, il existe une gamme de fréquences où les pertes par effet Joule deviennent négligeables, et le champ reste confiné à la surface du métal : c'est principalement ce régime qui nous intéressera dans cette thèse. Tous ces comportements sont en fait décrits par  $\varepsilon_r(\omega)$ . Comment modéliser cette fonction? Plusieurs réponses sont possibles, selon la précision sur les propriétés des métaux que l'on souhaite obtenir. Présentons l'un des modèles les plus simples de permittivité, dit modèle de Drude.

### 1.1.2 Le Modèle de Drude

Le modèle de Drude, proposé par Paul Drude en 1900 découle de ce que l'on appelle le *modèle plasma* [77, Chapitre 4], décrivant le transport des électrons dans les matériaux. Ce modèle consiste à considérer le métal comme un gaz d'électrons, libres de se déplacer dans un ensemble fixe de noyaux d'atomes. Ce choix est suffisamment précis pour expliquer les propriétés optiques des métaux pour une large gamme de fréquences (précisée par la suite). Dans le plasma, le déplacement de l'électron, de position  $\underline{\mathbf{x}}$ , de masse  $m$ , de charge  $-e$ , soumis à un champ électrique  $\underline{\mathbf{E}}$  satisfait l'équation :

$$m\ddot{\underline{\mathbf{x}}} + m\gamma\dot{\underline{\mathbf{x}}} = -e\underline{\mathbf{E}}. \quad (1.5)$$

Ci-dessus le terme  $m\gamma\dot{\underline{\mathbf{x}}}$  est un terme d'amortissement dû aux collisions avec les autres électrons, et il caractérise la dissipation du milieu. Le paramètre  $\gamma \geq 0$  est appelé fréquence de collision. Ce terme induit bien une perte d'énergie de l'électron : il suffit pour cela de multiplier (1.5) par  $\dot{\underline{\mathbf{x}}}$  et de prendre  $\underline{\mathbf{E}} = 0$ . Supposons que les électrons soient soumis à une excitation harmonique en temps  $\underline{\mathbf{E}}(t) = \Re e(\underline{\mathbf{E}}_0 e^{-i\omega t})$  ( $\omega > 0$ ) et que le régime périodique soit établi, cherchons alors une solution harmonique en temps  $\underline{\mathbf{x}}(t) = \Re e(\underline{\mathbf{x}}_0 e^{-i\omega t})$ . Par la suite nous noterons de façon abusive  $\underline{\mathbf{E}}$  et  $\underline{\mathbf{x}}$  pour

désigner le champ (resp. le déplacement) à valeurs réelles ou complexes. La solution cherchée est alors égale à :

$$\underline{\mathbf{x}} = \frac{e}{m(\omega^2 + i\omega\gamma)} \underline{\mathbf{E}}.$$

En notant  $N$  le nombre d'électrons par unité de volume, la polarisation par unité de volume  $\underline{\mathbf{P}}$  vaut alors  $\underline{\mathbf{P}} = -Ne\underline{\mathbf{x}}$ . Après transformée de Fourier en temps, en utilisant la remarque 1.2 et (1.3) nous obtenons :

$$\varepsilon_0 \underline{\mathbf{E}} - \frac{Ne^2}{m(\omega^2 + i\omega\gamma)} \underline{\mathbf{E}} = \varepsilon_0 \varepsilon_r^\gamma(\omega) \underline{\mathbf{E}},$$

et l'expression de la permittivité relative (indiquée par  $\gamma$ ) vaut :

$$\varepsilon_r(\omega) = \varepsilon_r^\gamma(\omega) := 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\omega\gamma}. \quad (1.6)$$

Le paramètre  $\omega_p > 0$  est appelé fréquence plasma, et est tel que  $\omega_p^2 = Ne^2/(\varepsilon_0 m)$ . Cette fréquence est généralement associée à une longueur d'onde dans l'ultra-violet. L'équation (1.6) est connue sous le nom de modèle de Drude, nous l'appellerons parfois modèle de Drude avec dissipation à cause du terme imaginaire lorsque  $\gamma \neq 0$ . Ce modèle est en fait satisfaisant pour décrire la permittivité des métaux pour la gamme de fréquences  $\gamma < \omega < \omega_p$  (1), dans le sens où le modèle concorde avec les expériences [78]. Nous reviendrons quelques instants sur la modélisation de  $\varepsilon_r$  pour des fréquences  $\omega \geq \omega_p$ . La permittivité relative décrite par (1.6) est complexe, de parties réelle et imaginaire :

$$\Re(\varepsilon_r^\gamma(\omega)) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \gamma^2}, \quad \text{et} \quad \Im(\varepsilon_r^\gamma(\omega)) = \frac{\omega_p^2 \gamma}{\omega(\omega^2 + \gamma^2)}.$$

Remarquons que la permittivité est toujours de partie imaginaire positive (pour la convention choisie  $e^{-i\omega t}$ ), tandis que la partie réelle est négative dès lors que  $\omega < \sqrt{\omega_p^2 - \gamma^2}$ .

**Remarque 1.3.** *Si nous avons choisi la convention en temps  $e^{i\omega t}$  (avec  $\omega > 0$ ), en reprenant les calculs précédents le modèle de Drude s'écrit*

$$\varepsilon_r^\gamma(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - i\omega\gamma},$$

*dans ce cas la partie imaginaire de  $\varepsilon_r^\gamma(\omega)$  est négative. Il est donc essentiel de fixer une convention en temps (et de s'y tenir) pour évaluer des quantités physiques. Dans toute la suite de ce manuscrit, nous choisirons toujours la convention  $e^{-i\omega t}$ .*

Pour des fréquences  $\gamma \ll \omega \leq \omega_p$ , la dissipation devient négligeable si bien que l'on peut négliger la partie imaginaire dans (1.6), et la permittivité diélectrique peut être assimilée à une fonction à valeurs réelles :

$$\varepsilon_r(\omega) = \varepsilon_r^0(\omega) := 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \quad (1.7)$$

Ce modèle est appelé modèle de Drude sans dissipation, parfois modèle de Drude simplifié. Le modèle (1.7) est en outre ce qui permet l'existence des plasmons. Terminons cette section par quelques commentaires sur le modèle :

---

1. La fréquence de collision  $\gamma$  est bien plus petite que la fréquence plasma ( $\gamma \ll \omega_p$ ) [58].

- ★ À la fréquence plasma,  $\varepsilon_r^0(\omega_p) = 0$ . À cette fréquence, il n'y a pas de déplacement électrique et le champ électrique est une dépolarisation pure (cf. (1.2)). La conséquence de ce phénomène est l'apparition de plasmons dits de volume [96, Chapitre 1]. Nous ne travaillerons qu'à des fréquences en-dessous de la fréquence plasma, c'est-à-dire qu'avec des plasmons de surface.
- ★ Pour les métaux nobles comme l'argent ou l'or, et pour des fréquences proches de  $\omega_p$ , il nous faut modifier le modèle (1.6) comme suit :

$$\varepsilon_r^\gamma(\omega) = \varepsilon_\infty - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\omega\gamma},$$

où  $\varepsilon_\infty$  ( $\varepsilon_\infty \geq 1$ ) est une constante diélectrique caractérisant le métal à très haute fréquence : en effet les métaux nobles ne se comportent pas tout à fait comme le vide lorsque  $\omega \rightarrow +\infty$ .

- ★ Pour les métaux nobles toujours, à des fréquences très proches de  $\omega_p$ , le modèle de Drude devient de moins en moins adapté (voir Figure 1.1). Ceci vient du phénomène de transition de bandes, provoquant de fortes absorptions d'énergie (les électrons passent facilement de la bande de valence à la bande de conduction).

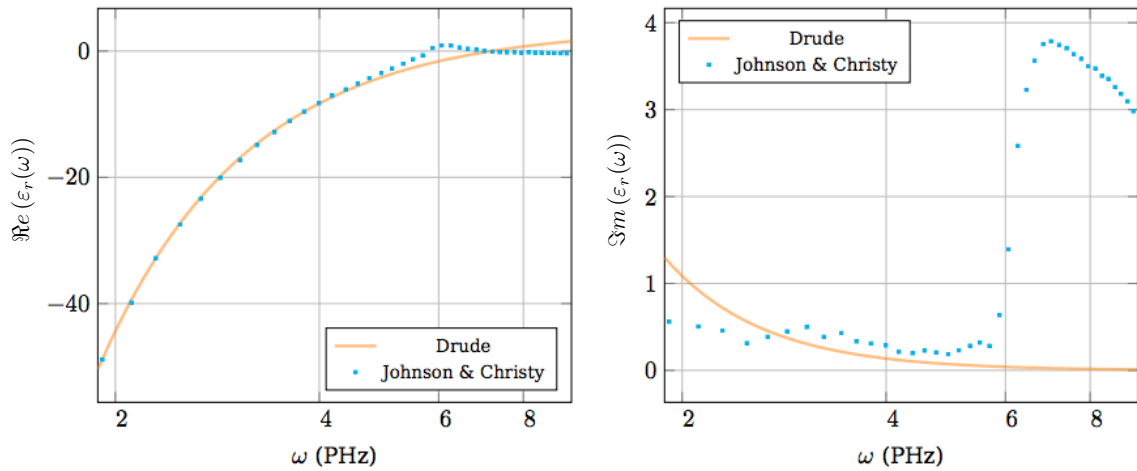


FIGURE 1.1 – Partie réelle (gauche) et partie imaginaire (droite) de la permittivité relative  $\varepsilon_r^\gamma(\omega)$ , dans le cas de l'argent : comparaison entre le modèle prédit par Drude et les résultats expérimentaux obtenus par Johnson et Christy. Pour l'argent, la fréquence plasma vaut  $\omega_p = 13.3$  PHz, et  $\gamma = 0.1331$  PHz. Source : [130].

Sans nous attarder sur le sujet, nous signalons qu'il est possible d'améliorer le modèle en considérant des modèles plus généraux, appelés modèles de Lorentz [127, 130]. Le modèle de Drude est en fait un cas particulier des modèles de Lorentz. Cela consiste à considérer une permittivité diélectrique de la forme :

$$\varepsilon_r^L(\omega) = 1 - \sum_{i=1}^I \frac{\omega_{p,i}^2}{\omega^2 - \omega_i^2 + i\omega\gamma_i},$$

où les paramètres  $\omega_i \geq 0$  correspondent à différentes fréquences de résonances. Ces modèles prennent notamment en compte l'interaction entre les électrons et les noyaux chargés positivement, via une(des) force(s) de rappel  $-m\omega_i\mathbf{x}$ . Le plus utilisé (et le plus simple), appelé modèle de Drude-Lorentz, prend en compte une seule force de rappel. Qui plus est, les matériaux dits de Lorentz ne sont pas forcément non magnétiques, et leur perméabilité obéit à une loi similaire à celle ci-dessus.

- ★ À basse fréquence ( $\omega$  proche de  $\gamma$ ), la partie imaginaire de  $\varepsilon_r^\gamma(\omega)$  devient prédominante, les métaux sont de plus en plus absorbants et la dissipation devient importante. Tous ces comportements sont donc en accord avec ceux annoncés au §1.1.1.
- ★ La permittivité ne dépend pas de la variable d'espace. Nous avons en fait négligé cette dépendance : cette simplification est valide dès lors que la longueur d'onde des champs dans le métal est bien plus grande que les dimensions caractéristiques du milieu. Lorsque les dimensions deviennent comparables, on ne peut plus considérer que la réponse optique est locale en espace, et le modèle de permittivité peut être corrigé en reprenant en compte cette dispersion spatiale. On parle de modèles non locaux [93]. L'utilisation de ces modèles permet d'apporter de petites corrections dans le calcul des plasmons de surface. Lorsque les géométries considérées présentent des pointes, ces modifications peuvent devenir importantes [96, Chapitre 7], notamment dans l'évaluation de l'énergie électromagnétique [95].
- ★ Dans les milieux linéaires non dispersifs (typiquement l'air, le vide) la densité d'énergie électromagnétique totale est donnée par [77] :  $w := w_e + w_m = \frac{1}{2} \left( \varepsilon_0 \varepsilon_r \langle |\mathbf{E}|^2 \rangle + \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \langle |\mathbf{H}|^2 \rangle \right)$ , avec  $\langle \cdot \rangle$  la moyenne du champ sur une période. Lorsque le milieu est dispersif (c'est-à-dire lorsque la permittivité dépend de la fréquence), cette densité n'est plus adaptée, plus précisément le terme  $w_e$  est sous évalué. Dans ce cas on remplace  $w_e$  par une densité  $w_{\text{eff}} := \frac{1}{2} \varepsilon_0 \Re \left( \frac{d}{d\omega} (\omega \varepsilon_r(\omega)) \right) \langle |\mathbf{E}|^2 \rangle$ . Pour le modèle (1.6), on peut montrer que  $w_{\text{eff}} > w_e$  pour les fréquences  $\omega \gg \gamma$ .
- ★ Enfin, nous mentionnons la cohérence du modèle de Drude avec les principes physiques sous-jacents, comme le principe de causalité (les champs à l'instant  $t$  ne dépendent que des champs aux instants antérieurs). C'est la raison pour laquelle les transformées de Fourier en temps sont choisies comme des transformations causales ( $\omega \geq 0$ ). On peut montrer que  $\varepsilon_r(\omega)$  est une fonction analytique dans le plan complexe supérieur, et qu'elle vérifie les relations de Kramers-Kronig. Les travaux de Titchmarsh ont permis de montrer que si ces relations sont satisfaites, alors il y a causalité [106, 88, 136].

Dans cette thèse, nous nous concentrerons sur l'étude de phénomènes plasmoniques mettant en jeu des matériaux de Drude, dans la gamme de fréquences  $\gamma \ll \omega < \omega_p$ . Il faudra tenir compte de ces simplifications dans l'interprétation "physique" des résultats. Citons d'ores et déjà les travaux de [99, 68, 67, 131, 129] sur la modélisation mathématique et la simulation des ondes électromagnétiques avec des modèles de Lorentz, ainsi que les travaux de John Pendry et ses collègues (par exemple [134, Chapitre 4] [93]) et [74, 101] pour des modèles de permittivité non locaux.

## 1.2 Plasmons de surface aux interfaces métal-diélectrique

Nous savons maintenant que les métaux peuvent présenter des propriétés remarquables, comme une permittivité de partie réelle négative. Aux interfaces métal-diélectrique, nous allons voir qu'il peut se propager des ondes particulières confinées à cette interface, appelées plasmons de surface. Ces plasmons de surface sont solutions des équations de Maxwell 2D homogènes, nous en chercherons l'expression pour une interface (plane) métal-diélectrique, puis pour deux interfaces (où les plasmons sont couplés).

### 1.2.1 Équations de Maxwell en régime harmonique

Comme précédemment, nous considérons les champs  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$  solutions des équations de Maxwell (1.1), dans un ouvert  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$  (pouvant être  $\mathbb{R}^3$  tout entier), composé d'une partie métallique  $\mathcal{O}_m$  et d'une partie diélectrique  $\mathcal{O}_d$ . Les indices  $_d$  et  $_m$  font et feront toujours référence à "diélectrique" et

"métal". Nous faisons l'hypothèse que la géométrie est invariante dans une direction, par exemple la direction  $z$  :  $\mathcal{O} := \{\mathbf{x} = (x, y, z) \in \Omega \times \mathbb{R}\}$  (voir Figure 1.2). Nous supposons aussi que les constantes physiques, ainsi que la densité de courant sont invariantes par rapport à cette direction  $z$ . Ainsi le système et tous les champs électromagnétiques ne dépendent pas de  $z$  :  $\frac{\partial \cdot}{\partial z} = 0$ .

Nous supposons aussi que la densité de courant  $\underline{\mathbf{J}}$  est à dépendance harmonique en temps :  $\underline{\mathbf{J}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$  pour tout  $\mathbf{x}, t$ , avec  $\omega > 0$ . Cela nous amène à chercher alors des champs de la forme :

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{E}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}, & \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{H}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}, \\ \underline{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{B}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}, & \underline{\mathbf{D}}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{D}(\mathbf{x})e^{-i\omega t},\end{aligned}$$

et les lois constitutives (1.3), (1.4) deviennent

$$\begin{aligned}\mathbf{D}(\mathbf{x}) &= \varepsilon_0 \varepsilon_d \mathbf{E}(\mathbf{x}), & \text{et } \mathbf{B}(\mathbf{x}) &= \mu_0 \mu_d \mathbf{H}(\mathbf{x}), & \forall \mathbf{x} \in \mathcal{O}_d, \\ \mathbf{D}(\mathbf{x}) &= \varepsilon_0 \varepsilon_m(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{x}), & \text{et } \mathbf{B}(\mathbf{x}) &= \mu_0 \mu_m \mathbf{H}(\mathbf{x}), & \forall \mathbf{x} \in \mathcal{O}_m,\end{aligned}$$

avec  $\varepsilon_d > 0$ ,  $\mu_d > 0$  la permittivité relative et la perméabilité magnétique de  $\mathcal{O}_d$ , respectivement  $\varepsilon_m(\omega)$  et  $\mu_m > 0$  la permittivité relative et la perméabilité magnétique de  $\mathcal{O}_m$ . Comme nous travaillons à fréquence fixée, nous omettons de noter la dépendance en  $\omega$  de  $\varepsilon_m$ . Nous noterons  $\varepsilon \in L^\infty(\mathcal{O})$ ,  $\mu \in L^\infty(\mathcal{O})$  les fonctions constantes par morceaux telles que

$$\varepsilon := \begin{cases} \varepsilon_d & \text{si } \mathbf{x} \in \mathcal{O}_d \\ \varepsilon_m & \text{si } \mathbf{x} \in \mathcal{O}_m \end{cases}, \quad \mu := \begin{cases} \mu_d & \text{si } \mathbf{x} \in \mathcal{O}_d \\ \mu_m & \text{si } \mathbf{x} \in \mathcal{O}_m \end{cases}.$$

On notera sans distinction  $\varepsilon$  et  $\mu$  les fonctions définies pour les géométries 1D, 2D ou 3D, et l'on considère de plus que  $\varepsilon^{-1} \in L^\infty(\mathcal{O})$ ,  $\mu^{-1} \in L^\infty(\mathcal{O})$ .

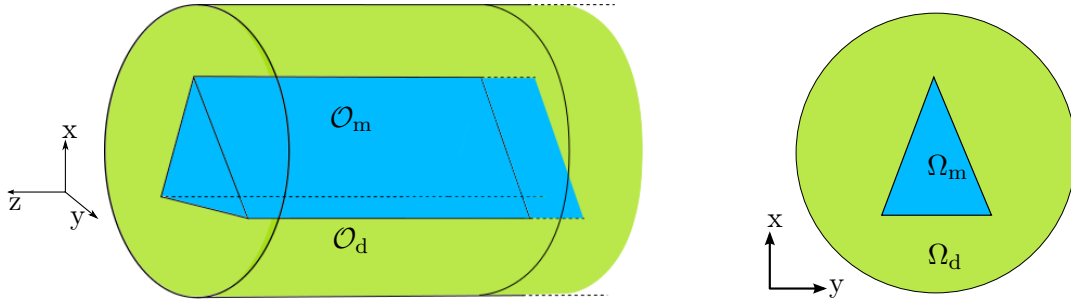


FIGURE 1.2 – Exemple simple de géométrie invariante dans une direction. Vue 3D à gauche, coupe 2D à droite.

En utilisant l'invariance par rapport à  $z$ , les équations de Maxwell peuvent se simplifier en un problème 2D dans  $\Omega$ . Pour une source  $\mathbf{J} = (J_x, J_y, J_z)^t$ , les composantes des champs  $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)^t$  et  $\mathbf{H} = (H_x, H_y, H_z)^t$  satisfont dans  $\Omega$  :

$$\begin{aligned}i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_x + \frac{\partial H_z}{\partial y} &= J_x, & i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_y - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= J_y, & i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_z + \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= J_z, \\ -i\omega\mu_0\mu H_x + \frac{\partial E_z}{\partial y} &= 0, & -i\omega\mu_0\mu H_y - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= 0, & -i\omega\mu_0\mu H_z + \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= 0,\end{aligned}$$

les deux dernières équations de (1.1) deviennent quant à elles

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial y} \right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial H_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial H_y}{\partial y} \right) = 0.$$



Ce système d'équations peut en fait se découpler en deux systèmes : un mettant en jeu le triplet  $(E_x, E_y, H_z)$ , l'autre le triplet  $(H_x, H_y, E_z)$ . Le premier système est appelé problème Transverse Magnétique (TM), et le deuxième Transverse Électrique (TE). Le mode (TM) est gouverné principalement par une équation du second ordre satisfaite par  $H_z$ , les composantes  $E_x, E_y$  s'en déduisant une fois  $H_z$  connu :

$$\operatorname{div}(\varepsilon^{-1}\nabla H_z) + k^2\mu H_z = \frac{\partial\varepsilon^{-1}J_x}{\partial y} - \frac{\partial\varepsilon^{-1}J_y}{\partial x}, \quad E_x = -\frac{\varepsilon^{-1}}{i\omega\varepsilon_0}\left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - J_x\right), \quad E_y = \frac{\varepsilon^{-1}}{i\omega\varepsilon_0}\left(\frac{\partial H_z}{\partial x} + J_y\right), \quad (1.8)$$

avec  $k^2 := \omega^2/c^2$ , où  $c := (\sqrt{\varepsilon_0\mu_0})^{-1}$  est la vitesse de la lumière. Nous l'avons déjà mentionné dans l'introduction, l'équation en  $H_z$  (1.8) pose des difficultés importantes si  $\varepsilon$  est à valeurs réelles et change de signe. Nous reviendrons sur l'existence et l'unicité du champ dans ce cas par la suite.

Le mode (TE) est gouverné quant à lui par les équations :

$$\operatorname{div}(\mu^{-1}\nabla E_z) + k^2\varepsilon E_z = -i\omega\mu_0 J_z, \quad H_x = \frac{\mu^{-1}}{i\omega\mu_0}\frac{\partial E_z}{\partial y}, \quad H_y = -\frac{\mu^{-1}}{i\omega\mu_0}\frac{\partial E_z}{\partial x}. \quad (1.9)$$

Nous signalons simplement que l'équation (1.9) en  $E_z$  est cette fois plus facile à étudier car, même si  $\varepsilon$  change de signe, ce changement n'apparaît pas dans le terme avec les dérivées d'ordre 2. Nous verrons qu'il n'existe alors pas de plasmons de surface pour le mode (TE). C'est le changement de signe dans le terme d'ordre 2 qui permet l'existence de ces ondes particulières. Lorsque l'interface entre les deux matériaux est plane, tous les calculs se font à la main. Commençons par étudier l'expression de ces plasmons pour le cas d'un guide planaire, illustré par la Figure 1.3.

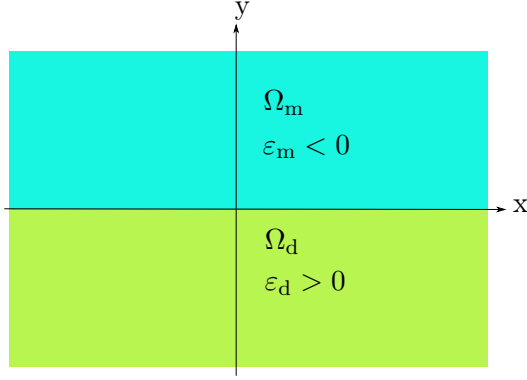
**Remarque 1.4.** *Lorsque l'interface entre les deux milieux n'est plus plane, il est plus difficile d'obtenir analytiquement l'expression des plasmons de surface. Si l'interface est courbe, des résultats similaires à ce que nous allons voir dans la section suivante peuvent être obtenus en travaillant avec les coordonnées curvilignes. Nous reviendrons par la suite sur le cas où l'interface présente des coins, situation qui nous intéresse dans cette thèse.*

## 1.2.2 Calcul des plasmons de surface pour le cas d'une seule interface : le guide planaire 2D

On considère  $\Omega = \mathbb{R}^2$  composé d'un diélectrique, et d'un métal. **Dans toute cette section on considère un métal non absorbant** : on modélise sa permittivité relative  $\varepsilon_m$  par (1.7). Les deux milieux forment deux plans semi-infinis (l'interface étant situé en  $y = 0$ ) :  $\Omega_m := \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ ,  $\Omega_d := \mathbb{R} \times \mathbb{R}^-$ , et l'on note  $\Sigma = \mathbb{R} \times \{0\}$  l'interface (voir Figure 1.3). On considère le système d'équations (1.8), (1.9) sans sources ( $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ ,  $\rho = 0$ ) et l'on cherche les modes guidés, c'est-à-dire des ondes se propageant dans la direction  $x$ , de la forme  $\mathbf{E}(x, y) = \mathbf{E}(y)e^{i\beta x}$ ,  $\mathbf{H}(x, y) = \mathbf{H}(y)e^{i\beta x}$ , avec  $\beta \in \mathbb{R}$ , la constante de propagation (ou nombre d'onde) dans la direction  $x$ . Comme  $\varepsilon$  et  $\mu$  sont des fonctions de  $y$  seulement, les équations de (1.8), (1.9) (sans terme source) se réécrivent alors en deux problèmes 1D sur  $\mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy}\left(\varepsilon^{-1}\frac{dH_z}{dy}\right) + (k^2\mu - \beta^2\varepsilon^{-1})H_z &= 0, & E_x &= -\frac{\varepsilon^{-1}}{i\omega\varepsilon_0}\frac{dH_z}{dy}, & E_y &= \beta\frac{\varepsilon^{-1}}{\omega\varepsilon_0}H_z, \\ \frac{d}{dy}\left(\mu^{-1}\frac{dE_z}{dy}\right) + (k^2\varepsilon - \beta^2\mu^{-1})E_z &= 0, & H_x &= \frac{\mu^{-1}}{i\omega\mu_0}\frac{dE_z}{dy}, & H_y &= -\beta\frac{\mu^{-1}}{\omega\mu_0}E_z. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Pour  $k$  fixé (soit  $\omega$  fixé), les paires  $(H_z, k^2\mu - \beta^2\varepsilon^{-1})$  et  $(E_z, k^2\varepsilon - \beta^2\mu^{-1})$  sont en fait solutions chacune d'un problème de valeurs propres 1D décrit par les équations de (1.10), dont nous parlerons plus en détails aux chapitres 3 et 4. Ces problèmes de valeurs propres sont non standards à cause du changement de signe de  $\varepsilon$ , surtout le problème en  $H_z$ . Cependant, comme c'est un problème unidimensionnel,

FIGURE 1.3 – Configuration étudiée. La direction  $x$  est la direction de propagation.

nous pouvons effectuer des calculs, en interprétant chacune de ces deux équations comme un problème de transmission :

$$\begin{array}{l}
 \text{Trouver } (H_z^d, H_z^m) \text{ tels que :} \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 (k^2 \mu_d \varepsilon_d - \beta^2) H_z^d + \frac{d^2 H_z^d}{dy^2} = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}_*^-, \\
 (k^2 \mu_m \varepsilon_m - \beta^2) H_z^m + \frac{d^2 H_z^m}{dy^2} = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}_*^+, \\
 H_z^d(0) = H_z^m(0), \\
 \varepsilon_d^{-1} \frac{dH_z^d}{dy}(0) = \varepsilon_m^{-1} \frac{dH_z^m}{dy}(0),
 \end{array} \right.
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 \text{Trouver } (E_z^d, E_z^m) \text{ tels que :} \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 (k^2 \mu_d \varepsilon_d - \beta^2) E_z^d + \frac{d^2 E_z^d}{dy^2} = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}_*^-, \\
 (k^2 \mu_m \varepsilon_m - \beta^2) E_z^m + \frac{d^2 E_z^m}{dy^2} = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}_*^+, \\
 E_z^d(0) = E_z^m(0), \\
 \mu_d^{-1} \frac{dE_z^d}{dy}(0) = \mu_m^{-1} \frac{dE_z^m}{dy}(0).
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Les deux dernières équations de chaque système assurent le raccord de la solution à l'interface, et sont appelées conditions de transmission. On fixe pour le moment  $k > 0$ . On définit les constantes  $k_d$  et  $k_m$  telles que  $k_d^2 = \beta^2 - k^2 \mu_d \varepsilon_d$ , et  $k_m^2 = \beta^2 - k^2 \mu_m \varepsilon_m$ . Les plasmons étant des ondes confinées à l'interface décroissant exponentiellement dans la direction perpendiculaire à celle de propagation (voir Figure 1.5), on suppose  $k_d \geq 0$ ,  $k_m \geq 0$ , et pour assurer la décroissance à l'infini les solutions sont cherchées de la forme :

$$H_z^d(y) = A e^{k_d y}, \quad H_z^m(y) = B e^{-k_m y}, \quad E_z^d(y) = C e^{k_d y}, \quad E_z^m(y) = D e^{-k_m y},$$

avec  $A, B, C, D$  des constantes. Notons que nous nous plaçons dans le régime de fréquences  $\omega < \omega_p$ , ainsi  $\varepsilon_m < 0$  et  $k_m^2 \geq 0$ . On peut donc définir la constante positive  $k_m$  pour tout  $\beta$ . Par contre la condition  $k_d^2 \geq 0$  restreint aux nombres d'ondes  $\beta$  tels que  $\beta^2 \geq k^2 \mu_d \varepsilon_d$ .

Pour le problème en  $H_z$ , les conditions de transmission impliquent que

$$\begin{cases}
 A = B, \\
 A k_d \varepsilon_d^{-1} = -B k_m \varepsilon_m^{-1}.
 \end{cases}$$

Nous aurons des solutions non triviales du système ci-dessus (d'inconnues  $A$  et  $B$ ) si et seulement si le déterminant du système est nul soit

$$k_d \varepsilon_m + k_m \varepsilon_d = 0. \tag{1.11}$$

Nous voyons donc l'importance du changement de signe de  $\varepsilon$ . En effet, pour  $\varepsilon_m > 0$  l'équation ci-dessus n'a pas de solution, le seul choix possible est  $A = B = 0$ . Dans les matériaux classiques, ou en dehors des fréquences optiques, il n'y a pas de plasmons de surface pour le mode (TM). Pour le problème en  $E_z$ , c'est la même chose : avec les conditions de transmission nous obtenons des solutions non nulles si et seulement si  $k_d \mu_m + k_m \mu_d = 0$ . Ainsi il ne peut exister de plasmons de surface pour le problème (TE). Ceci est encore une fois lié au fait que le coefficient qui change de signe est placé dans le terme d'ordre 2 (et se retrouve dans les conditions de transmission) ou non. Dans la suite nous étudierons donc seulement le problème (TM).

En utilisant (1.11), l'expression de  $k_d$  et  $k_m$ , nous obtenons que de telles ondes existent pour les constantes de propagation  $\beta$  telles que

$$\beta^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\varepsilon_d \varepsilon_m}{\varepsilon_d + \varepsilon_m} \frac{\varepsilon_d \mu_m - \varepsilon_m \mu_d}{\varepsilon_d - \varepsilon_m}. \quad (1.12)$$

L'expression (1.12) est appelée relation de dispersion. Analysons-la un instant. Il arrive souvent que la dernière fraction (qui est toujours positive) soit égale à 1 : en effet, il suffit pour cela de considérer des matériaux de même perméabilité magnétique. Les matériaux comme l'air, le cuivre, l'aluminium, l'argent, l'or, présentent des perméabilités très proches voire égales à celles du vide, il est courant de faire cette simplification [58]. Faisons-la, ce qui nous donne :

$$\beta^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\varepsilon_d \varepsilon_m}{\varepsilon_d + \varepsilon_m}.$$

Rappelons que nous cherchons des ondes guidées, soit  $\beta \in \mathbb{R}$  : puisque  $\varepsilon_m < 0$ , ceci n'est possible que si  $\varepsilon_m + \varepsilon_d < 0$ . Comme  $\varepsilon_m$  dépend de la fréquence, en utilisant le modèle de Drude simplifié (1.7), cette condition s'écrit encore

$$\varepsilon_m(\omega) + \varepsilon_d < 0 \iff \omega < \omega_{\text{sp}} := \frac{\omega_p}{\sqrt{\varepsilon_d + 1}}.$$

La fréquence  $\omega_{\text{sp}}$  est appelée fréquence plasmon ( $_{\text{sp}}$  pour *surface plasmon*), et  $\omega_{\text{sp}} < \omega_p$ . Dans ce cas

$$\beta = \pm \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\varepsilon_d(\omega_p^2 - \omega^2)}{(\varepsilon_d + 1)(\omega_{\text{sp}}^2 - \omega^2)}}. \quad (1.13)$$

Pour  $\omega > \omega_{\text{sp}}$ , on a  $\beta^2 \leq 0$  (voir Figure 1.4 pour un exemple). Cela signifie que pour des fréquences en-dessous de la fréquence plasmon, les plasmons de surface existent, tandis que pour des fréquences plus élevées nous n'obtenons que des comportements évanescents. Notons aussi qu'automatiquement les solutions (1.13) sont telles que  $\beta^2 \geq k^2 \mu_d \varepsilon_d$ .

Analysons (1.13). On choisit la racine positive, alors  $\omega \mapsto \beta(\omega)$  est une fonction croissante puisque

$$\frac{d\beta}{d\omega} = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{\varepsilon_d(\omega_p^2 - \omega^2)}{(\varepsilon_d + 1)(\omega_{\text{sp}}^2 - \omega^2)}} + \frac{\omega^2}{c} \frac{\omega_p^2 - \omega_{\text{sp}}^2}{(\omega_{\text{sp}}^2 - \omega^2)(\omega_p^2 - \omega^2)} \geq 0, \quad \omega < \omega_{\text{sp}}.$$

De plus  $\beta(\omega) \rightarrow +\infty$  lorsque  $\omega \rightarrow \omega_{\text{sp}}$ , et donc  $k_d$  et  $k_m$  tendent aussi vers l'infini. Cela signifie que plus on se rapproche de la fréquence plasmon, plus le plasmon oscille dans la direction de propagation et est confiné à l'interface. Intéressons-nous maintenant au couplage entre deux plasmons.

### 1.2.3 Cas de deux interfaces planes : couplage des plasmons de surface

On considère par exemple une bande métallique (non absorbante) d'épaisseur  $2a$ ,  $a > 0$ , entourée par un diélectrique de part et d'autre (voir Figure 1.6).

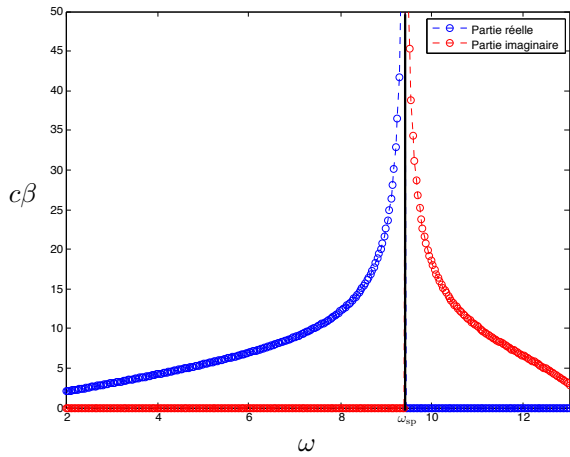


FIGURE 1.4

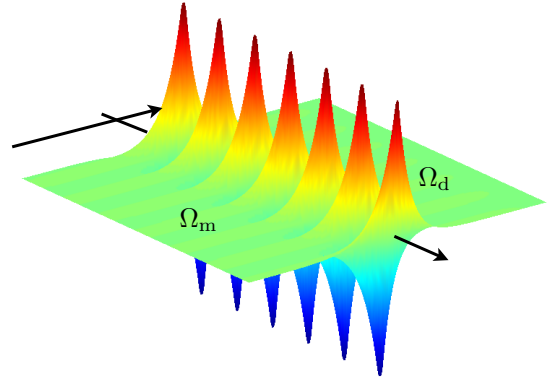


FIGURE 1.5

Figure 1.4 : Relation de dispersion (1.13) dans le cas d'un guide planaire avec de l'air ( $\varepsilon_d = 1$ ) et de l'argent ( $\varepsilon_m(\omega)$  donné par (1.7), avec  $\omega_p = 13.3$  PHz). La fréquence plasmon vaut  $\omega_{sp} = 9.4$  PHz (l'asymptote  $\omega = \omega_{sp}$  est indiquée en noir). Figure 1.5 : Représentation d'un plasmon de surface pour une interface métal-diélectrique.

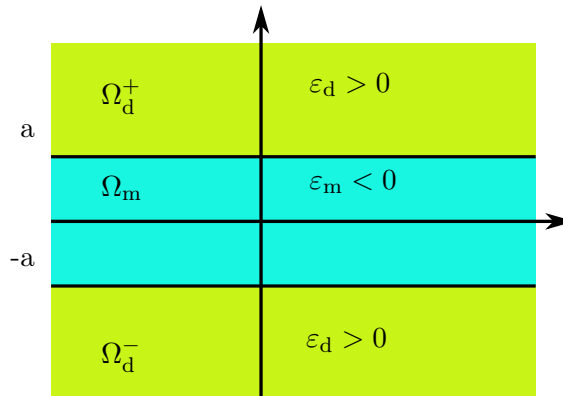


FIGURE 1.6 – Exemple de géométrie avec deux interfaces. On parle parfois de sandwich DMD (diélectrique-métal-diélectrique). Son inverse, le MDM, peut aussi être considérée (mais les propriétés physiques différent, cf. [96]). Nous reviendrons par la suite sur le guide MDM.

Si le métal est suffisamment épais, les modes sont très peu couplés et comme au §1.2.2, nous obtenons deux plasmons confinés sur les interfaces  $\Sigma^\pm := \mathbb{R} \times \{\pm a\}$ . Cela signifie aussi que le champ est négligeable au voisinage de  $\Sigma = \mathbb{R} \times \{0\}$ . Plus l'épaisseur du métal est petite, plus les modes sont couplés. Comme précédemment, nous reformulons le problème en  $H_z$  sous la forme d'un problème de

transmission :

Trouver  $(H_z^{d+}, H_z^m, H_z^{d-})$  tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} -k_d^2 H_z^{d+} + \frac{d^2 H_z^{d+}}{dy^2} = 0 \quad \text{sur } ]a; +\infty[, \\ -k_m^2 H_z^m + \frac{d^2 H_z^m}{dy^2} = 0 \quad \text{sur } ]-a; a[, \\ -k_d^2 H_z^{d-} + \frac{d^2 H_z^{d-}}{dy^2} = 0 \quad \text{sur } ]-\infty; -a[, \\ H_z^{d+}(a) = H_z^m(a), \quad H_z^{d-}(-a) = H_z^m(-a), \\ \varepsilon_d^{-1} \frac{dH_z^{d+}}{dy}(a) = \varepsilon_m^{-1} \frac{dH_z^m}{dy}(a), \quad \varepsilon_d^{-1} \frac{dH_z^{d-}}{dy}(-a) = \varepsilon_m^{-1} \frac{dH_z^m}{dy}(-a). \end{array} \right.$$

Comme précédemment, on suppose  $k_d \geq 0$  ( $k_m \geq 0$  automatiquement) nous avons alors :

$$H_z^{d+}(y) = Ae^{-k_d(y-a)}, \quad H_z^{d-}(y) = Be^{k_d(y+a)}, \quad H_z^m(y) = Ce^{k_m(y-a)} + De^{-k_m(y+a)}.$$

Cette fois, comme  $\Omega_m$  est borné nous n'avons pas de raison de privilégier un comportement décroissant pour  $H_z^m$ . Les conditions de transmission impliquent :

$$\left\{ \begin{array}{l} A = C + De^{-2k_m a}, \\ B = Ce^{-2k_m a} + D, \\ -\varepsilon_d^{-1} k_d A = \varepsilon_m^{-1} k_m (C - De^{-2k_m a}), \\ \varepsilon_d^{-1} k_d B = \varepsilon_m^{-1} k_m (Ce^{-2k_m a} - D). \end{array} \right.$$

Il existe des solutions non triviales de ce système (dont les inconnues sont les constantes  $A, B, C, D$ ) si et seulement si

$$(\varepsilon_m k_d - \varepsilon_d k_m)^2 e^{-4k_m a} = (\varepsilon_m k_d + \varepsilon_d k_m)^2. \quad (1.14)$$

Notons que puisque  $\varepsilon_m < 0$ , nous avons  $\varepsilon_m k_d - \varepsilon_d k_m < 0$ , et pour une épaisseur de métal infinie ( $a \rightarrow \infty$ ) nous retrouvons la condition du §1.2.2, à savoir  $\varepsilon_m k_d + \varepsilon_d k_m = 0$ . L'équation implicite (1.14) est en fait la relation de dispersion du système. En prenant la racine de (1.14) et en utilisant la fonction  $x \mapsto \tanh(x)$ , on peut réécrire la relation de dispersion en deux expressions "plus simples" :

$$\tanh(k_m a) = -\frac{k_d \varepsilon_m}{k_m \varepsilon_d}, \quad \tanh(k_m a) = -\frac{k_m \varepsilon_d}{k_d \varepsilon_m}. \quad (1.15)$$

Il y a deux expressions possibles à cause de la racine, et il est nécessaire de considérer les deux. En fait, on peut montrer que la première relation de (1.15) correspond à chercher des solutions qui sont symétriques par rapport à  $\Sigma$ , tandis que la seconde correspond à des ondes antisymétriques. Nous aurions pu dès le départ chercher les solutions sous ces deux formes vue la symétrie de la géométrie.

Cela revient à imposer en plus  $\frac{dH_z^m}{dy}(0) = 0$  ou  $H_z^m(0) = 0$ . Avec cette condition supplémentaire, nous pouvons réduire le système à deux inconnues  $A, C$  (dans le premier cas on trouve  $C = D$  ce qui implique  $A = B$ , dans le second on a  $C = -D$  ce qui implique  $A = -B$ ). Un rapide calcul permet de

retrouver alors (1.15).

Trouver des solutions de (1.15) est équivalent à résoudre, en posant  $X := k_m a$  et  $X_0 := ka\sqrt{\varepsilon_d \mu_d + |\varepsilon_m| \mu_m}$ ,

$$\begin{aligned} \tanh(X) = f(X) &:= \frac{|\varepsilon_m| \sqrt{X^2 - X_0^2}}{\varepsilon_d X}, \\ \tanh(X) = g(X) &:= \frac{\varepsilon_d X}{|\varepsilon_m| \sqrt{X^2 - X_0^2}}, \end{aligned} \quad (1.16)$$

ceci pour  $X > X_0$ . La fonction  $f$  est une fonction croissante,  $f(X_0) = 0$  et  $f$  tend vers  $|\varepsilon_m|/\varepsilon_d$  à l'infini. Comme  $g = 1/f$ , la fonction  $g$  est donc décroissante,  $g(X) \rightarrow +\infty$  lorsque  $X \rightarrow X_0$  et  $g$  tend vers  $\varepsilon_d/|\varepsilon_m|$  à l'infini. Comme  $0 \leq \tanh(X) < 1$ , pour  $X > X_0$ , nous pouvons montrer que

$$\text{Si } \frac{|\varepsilon_m|}{\varepsilon_d} \leq 1 \implies \text{il n'y a pas de solution de (1.15)-(1.16).}$$

Il nous faut donc travailler pour des valeurs de  $\varepsilon_m$  telles que  $|\varepsilon_m|/\varepsilon_d > 1$ . En se rappelant que  $\varepsilon_m$  dépend de la fréquence (1.7), cela signifie que les solutions de (1.16) peuvent exister si et seulement si

$$\frac{|\varepsilon_m|}{\varepsilon_d} > 1 \iff \omega < \omega_{\text{sp}}.$$

Avec les variations de  $f$  et  $g$  on en déduit qu'à  $\omega < \omega_{\text{sp}}$  fixé, il existe une unique solution de (1.16) (voir Figure 1.7 pour une représentation graphique). Comme précédemment, en explicitant la dépendance en

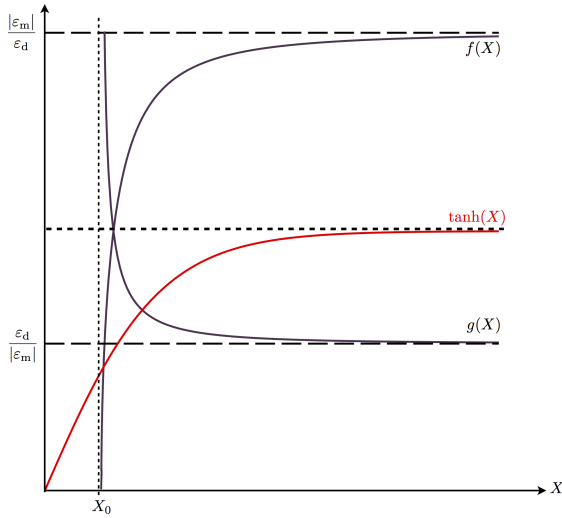


FIGURE 1.7

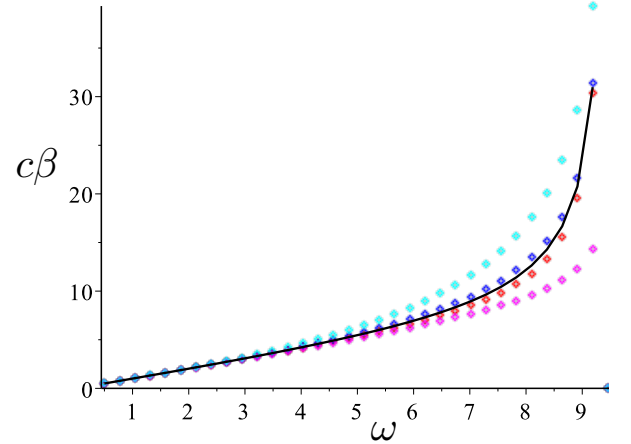


FIGURE 1.8

Figure 1.7 : représentation graphique de (1.16) lorsque  $|\varepsilon_m|/\varepsilon_d > 1$ . Figure 1.8 : simulation des relations de dispersion (1.15) représentant  $c\beta$  en fonction de  $\omega$ , pour une configuration type air-métal-air pour deux épaisseur  $a$ . Pour  $a = 0.1$  le mode antisymétrique est représenté en bleu foncé, le mode symétrique en rouge, pour  $a = 0.05$  le mode antisymétrique est représenté en cyan et le mode symétrique en rose. La relation de dispersion pour un plasmon seul (voir (1.13)) est représentée en noir. Lorsque  $\beta \rightarrow \infty$ , les fréquences des deux modes possibles convergent vers la fréquence plasmon  $\omega_{\text{sp}}$ .

$\omega$  de  $\varepsilon_m(\omega)$ , nous pouvons tracer la relation de dispersion liant  $\beta$  à  $\omega$  ainsi que les modes couplés (voir

Figures 1.8 et 1.9). A fréquence fixée, le mode antisymétrique est plus oscillant dans la direction de propagation qu'un plasmon seul, alors que le mode symétrique se propage à nombre d'onde plus petit qu'un plasmon seul : plus l'épaisseur du métal diminue, plus la différence est marquée. Aussi les modes symétriques sont moins confinés ( $k_d$  et  $k_m$  sont plus petits) que les modes antisymétriques. En référence à ces caractéristiques, on parle alors de *long-range* surface plasmons pour les modes symétriques, et de *short-range* pour les modes antisymétriques [96, 92, 134].

Quelles différences obtenons-nous lorsque l'on considère un guide dit MDM? La majeure différence est, comme  $\Omega_d := \mathbb{R} \times ]-a; a[$  est borné,  $k_d$  n'est pas forcément réel. Si l'on se restreint aux  $\beta$  tels que  $k_d^2 \geq 0$ , alors en reprenant les calculs précédents en échangeant les rôles de  $k_m$  et  $k_d$ , on obtient la relation de dispersion

$$(\varepsilon_d k_m - \varepsilon_m k_d)^2 e^{-4k_d a} = (\varepsilon_m k_d + \varepsilon_d k_m)^2,$$

ce qui peut s'écrire encore sous la forme

$$\tanh(k_d a) = -\frac{k_d \varepsilon_m}{k_m \varepsilon_d}, \quad \tanh(k_d a) = -\frac{k_m \varepsilon_d}{k_d \varepsilon_m}. \tag{1.17}$$

Le comportement des modes symétriques et antisymétriques s'inverse : à fréquence fixée les modes symétriques sont plus oscillants qu'un plasmon seul, qui est plus oscillant que les modes antisymétriques. Maintenant il se peut très bien que  $k_d^2 \leq 0$ . Si c'est le cas alors  $k_d \in i\mathbb{R}$  et les solutions sont de la forme

$$H_z^{m+}(y) = A e^{-k_m(y-a)}, \quad H_z^{m-}(y) = B e^{k_m(y+a)}, \quad H_z^d(y) = C e^{i|k_d|(y-a)} + D e^{-i|k_d|(y+a)}.$$

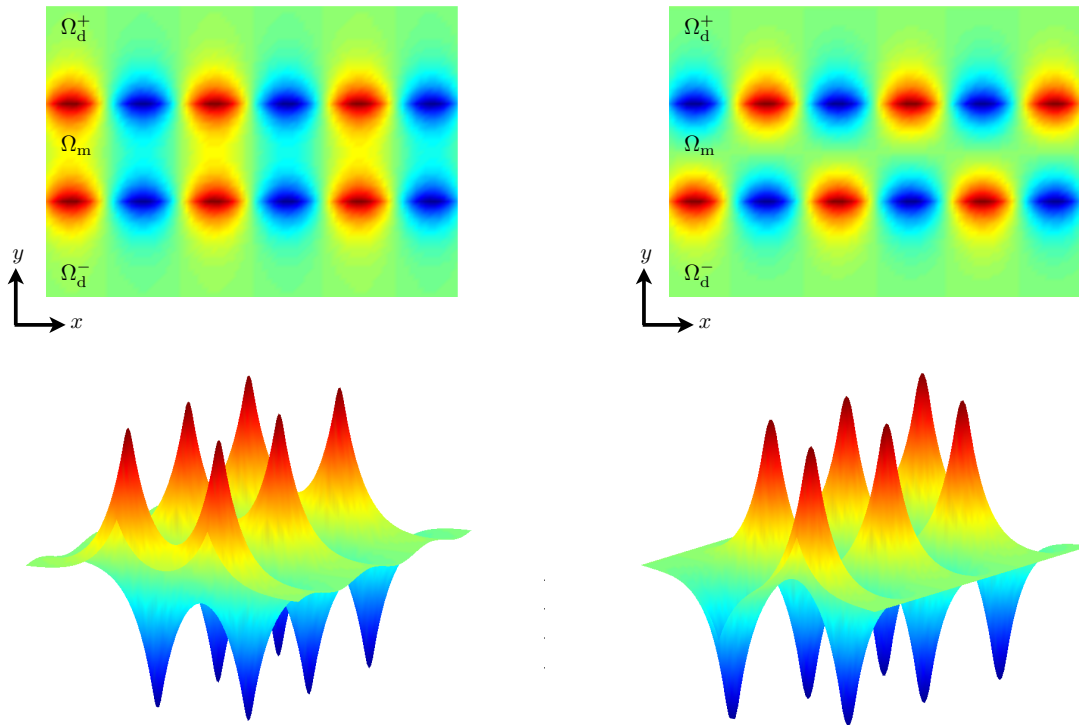


FIGURE 1.9 – Représentation d'un mode symétrique (gauche) et d'un mode antisymétrique (droite) pour un guide diélectrique-métal-diélectrique.

On obtient la relation de dispersion suivante :

$$(\varepsilon_d k_m + i|\varepsilon_m k_d|)^2 e^{-4i|k_d|a} = (-i|\varepsilon_m k_d| + \varepsilon_d k_m)^2, \quad (1.18)$$

ce qui s'écrit encore

$$\tan(|k_d|a) = \frac{2\varepsilon_d k_m |\varepsilon_m k_d|}{(\varepsilon_d k_m)^2 - |\varepsilon_m k_d|^2}, \quad (1.19)$$

le cas  $\varepsilon_d k_m = |\varepsilon_m k_d|$  pouvant directement être traité avec (1.18). La résolution de (1.19) peut comme précédemment se faire de façon graphique : en posant  $X := |k_d|a$ , résoudre (1.19) revient à résoudre

$$\tan(X) = 2\varepsilon_d |\varepsilon_m| \frac{X \sqrt{X^2 + X_0^2}}{X^2(\varepsilon_d^2 - |\varepsilon_m|^2) + X_0^2},$$

avec  $X_0$  le même paramètre que précédemment ( $X_0 := k^2 a^2 (\varepsilon_d \mu_d + |\varepsilon_m| \mu_m)$ ). Dans ce cas nous obtenons plusieurs solutions (à cause de la tangente), qui correspondent aux modes dans  $\Omega_d$ , et nous pouvons avoir des modes même pour  $\omega > \omega_{sp}$ .

Nous nous arrêtons-là sur les aspects physiques des plasmons couplés, le lecteur pourra feuilleter par exemple [96, 123, 134, 36] pour connaître plus en détails les applications et autres propriétés du couplage des plasmons.

Nous terminons cette section en commentant l'influence de la fréquence  $\omega$  sur les modes, plus précisément le terme en  $k^2$  des équations. Pour cela nous nous plaçons dans un cas très particulier du "quasi-statique", c'est-à-dire le cas particulier  $k = 0$  (soit  $\omega = 0$ ). Notons que ce cas n'est pas "physique" ici dans le sens où, lorsque l'on modélise la permittivité du métal avec le modèle de Drude simplifié, pour  $\omega = 0$  le modèle n'est pas valide. Cependant nous pouvons simplement étudier ce qu'il se passe sans expliciter la dépendance en  $\omega$  de  $\varepsilon_m$ . Nous verrons notamment que le problème étudié au chapitre 3 pourra se ramener aux mêmes équations posées dans un guide périodique sans le terme en  $k^2$  (sans pour autant fixer  $k = 0$ ). L'intérêt de ce calcul est donc de préparer les résultats que nous verrons au chapitre 3. Que deviennent les relations de dispersion dans les guides DMD et MDM ? La première chose à noter est que pour  $k = 0$ , alors

$$k_m^2 = k_d^2 = \beta^2,$$

et les relations de dispersion (1.15)-(1.17) se réduisent à

$$\tanh(\beta a) = \frac{|\varepsilon_m|}{\varepsilon_d}, \quad \tanh(\beta a) = \frac{\varepsilon_d}{|\varepsilon_m|}. \quad (1.20)$$

D'une part les relations de dispersion sont plus simples, d'autre part elles sont indépendantes de la configuration (DMD ou MDM) ! Nous remarquons aussi que les deux relations de dispersions (1.20) ne peuvent être vérifiées à la fois, ce qui implique que tous les modes sont soit symétriques, soit antisymétriques.

Aussi il n'y a plus de contraintes sur les valeurs de  $\varepsilon$ . La première relation de dispersion caractérise toujours les modes symétriques tandis que la seconde caractérise les modes antisymétriques, et nous avons le résultat suivant :

$$\begin{aligned} \text{Si } \frac{|\varepsilon_m|}{\varepsilon_d} < 1 &\implies \text{ les modes sont tous symétriques.} \\ \text{Si } \frac{|\varepsilon_m|}{\varepsilon_d} > 1 &\implies \text{ les modes sont tous antisymétriques.} \end{aligned}$$



Encore une fois, plus on se rapproche du cas  $|\varepsilon_m| = \varepsilon_d$ , plus les solutions de (1.20) tendent vers l'infini. Cela signifie que les modes sont de plus en plus oscillants dans la direction de propagation et de plus en plus confinés aux interfaces. Nous pouvons donc observer que le terme en  $k^2$  est véritablement un terme de couplage, permettant d'avoir des modes symétriques et antisymétriques.

**Remarque 1.5.** *Comme annoncé précédemment, dans le chapitre 3, nous calculerons les modes couplés dans un guide périodique DMD ou MDM. Dans ce cas nous ne travaillons plus sur  $\mathbb{R}^2$  tout entier, mais dans une bande  $\mathbb{R} \times [-L; L]$ . Nous retrouverons les caractérisations que nous venons de voir, cependant la relation de dispersion diffèrera de (1.20). Ceci est au fait que nous travaillerons dans un guide de section bornée.*

Dans les sections §1.2.2, §1.2.3, nous avons supposé la dissipation négligeable, permettant la propagation de "purs" plasmons de surface. Cependant, même en présence d'absorption, ceux-ci sont présents mais leurs effets sont amoindris. Nous présentons quelques commentaires vis-à-vis de l'influence de la dissipation sur les plasmons dans la section suivante.

### 1.2.4 Plasmons de surface dans les milieux dissipatifs

Reprenons le cas de la section §1.2.2. Si l'on ne suppose pas la dissipation négligeable et que les permittivités relatives pour le métal et le diélectrique sont les mêmes, alors la relation de dispersion (1.12) nous donne :

$$\beta = \pm \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\varepsilon_d(\omega_p^2 - \omega^2 - i\omega\gamma)}{(\varepsilon_d + 1)(\omega_{sp}^2 - \omega^2 - i\omega\gamma)}} \quad (2), \quad (1.21)$$

donc  $\beta$  devient complexe. Cela signifie qu'à mesure que le plasmon se propage, celui-ci est de plus en plus atténué, et la quantification de l'atténuation se fait à partir de  $\Im m(\beta)$ . Nous avons tracé ci-dessous la courbe de dispersion (1.21).

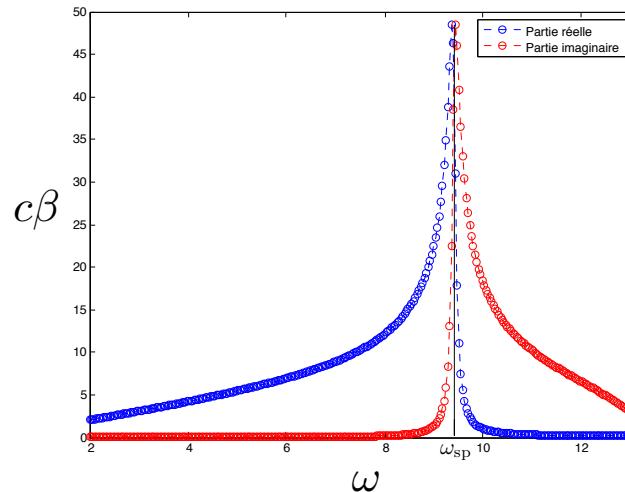


FIGURE 1.10 – Relation de dispersion (1.21) dans le cas d'une interface plane avec de l'air ( $\varepsilon_d = 1$ ) et de l'argent ( $\varepsilon_m(\omega)$  est donné par (1.6) avec  $\omega_p = 13.3$  PHz et  $\gamma = 0.113$  PHz).

2. On définit ici la racine d'un nombre complexe avec la coupure placée sur  $\mathbb{R}^-$ .

Contrairement au cas sans dissipation,  $\omega \mapsto \beta(\omega)$  possède une limite finie lorsque  $\omega = \omega_{\text{sp}}$ . Lorsqu'on se rapproche de  $\omega_{\text{sp}}$ ,  $\Re(\beta)$  augmente mais aussi  $\Im(\beta)$  : le plasmon est de plus en plus atténué dans la direction de propagation. Il faut remarquer que les nombres d'ondes  $k_d$  et  $k_m$  deviennent complexes à leur tour, diminuant le confinement du plasmon à l'interface. Le plasmon oscille alors perpendiculairement à la direction de propagation, et s'atténue dans celle de propagation : on se rapproche là de plus en plus d'un mode à fuite. Nous reparlerons de cette catégorie de mode dans le chapitre 4. Au-dessus de la fréquence plasmon, le rapport confinement/atténuation est inversé : le plasmon est très atténué dans la direction de propagation et oscille fortement dans la direction perpendiculaire, ce comportement est caractéristique des modes à fuite. Nous voyons donc que selon l'application cherchée (guidage du plasmon, confinement ou radiation), il est préférable de bien choisir la fréquence d'excitation.

Nous avons vu que l'existence des plasmons de surface est intimement lié au changement de signe de la permittivité, et, pour une interface plane, il y a un changement de comportement à la fréquence particulière  $\omega_{\text{sp}}$ . À cette fréquence le rapport des permittivités, aussi appelé contraste,  $\kappa_\varepsilon := \varepsilon_m/\varepsilon_d$  est tel que  $\kappa_\varepsilon = -1$ . Nous allons maintenant étudier ces problèmes d'un point de vue mathématique. Les problèmes (1.8), (1.9) satisfaits par  $H_z$ ,  $E_z$  sont à l'origine de problèmes de transmission dits avec changement de signe. Ces problèmes avec changement de signe ont d'ores et déjà été étudiés en domaine borné dans un cadre fonctionnel classique, et il n'est pas évident à première vue de montrer leur caractère bien posé. Nous présentons la méthode de T-coercivité, qui permet de garantir au moins le caractère Fredholm sous quelques conditions sur la géométrie et sur  $\varepsilon$  (plus précisément sur  $\kappa_\varepsilon$ ). Nous allons retrouver que le cas  $\kappa_\varepsilon = -1$  joue un rôle particulier dans les problèmes avec changement de signe (pas seulement dans le cas d'une interface plane). Cette approche nous permettra de justifier au chapitre 4 l'existence des plasmons par exemple, mais aussi en termes de discrétisation l'approximation de la solution par des méthodes type éléments finis (voir chapitre 2). Nous allons revenir à une géométrie 2D plus générale (comme la Figure 1.2), et nous aborderons notamment le cas des coins (nous parlerons entre autres des interfaces courbes à la fin du chapitre 2).

## 1.3 Étude mathématique de problèmes avec changement de signe

### 1.3.1 Problème type et cadre fonctionnel

Introduisons quelques notations, qui nous seront utiles pour toute la suite de la thèse. Soit un domaine (*i.e.* un ouvert borné connexe à frontière lipschitzienne)  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ( $d = 2, 3$ ). De façon classique, on note  $L^2(\Omega)$  les fonctions de carré intégrable sur  $\Omega$ , de produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_\Omega$ , et la norme  $L^2$  sera notée  $\|\cdot\|_\Omega$ . On munit  $H^1(\Omega)$  de la norme  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)} := (\|\cdot\|_\Omega^2 + \|\nabla \cdot\|_\Omega^2)^{1/2}$ . On note  $H_0^1(\Omega)$  l'espace des fonctions de  $H^1(\Omega)$  de trace nulle sur  $\partial\Omega$ , que l'on munit de la norme  $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)} := \|\nabla \cdot\|_\Omega$ . Enfin on note  $H^{-1}(\Omega)$  le dual de  $H_0^1(\Omega)$ , constitué des formes linéaires continues sur  $H_0^1(\Omega)$ , muni de la norme

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} := \sup_{v \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\langle f, v \rangle_\Omega}{\|v\|_{H_0^1(\Omega)}}, \quad \forall f \in H^{-1}(\Omega),$$

avec  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Omega$ , le crochet de dualité  $H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ .

On considère  $\Omega$  tel que  $\overline{\Omega} = \overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2}$ , avec  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  deux domaines tels que  $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ . L'interface séparant  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  est notée  $\Sigma$ . Le domaine  $\Omega_1$  désigne par exemple le diélectrique et  $\Omega_2$  la partie métallique. On introduit finalement, pour  $i = 1, 2$ , les frontières  $\Gamma_i := \partial\Omega \cap \partial\Omega_i$ , les espaces  $H_{0,\Gamma_i}^1(\Omega) := \{v|_{\Omega_i}, v \in H_0^1(\Omega)\}$ , et la notation  $v_i := v|_{\Omega_i}$  pour tout  $v \in H_0^1(\Omega)$ .

Pour une donnée  $f \in H^{-1}(\Omega)$ , on étudie le problème type suivant :

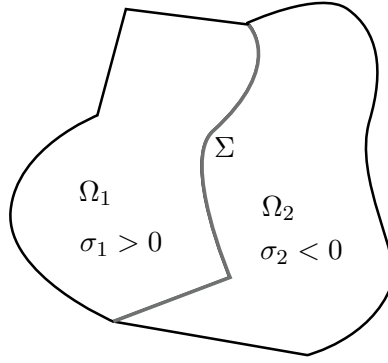


FIGURE 1.11 – Exemple de géométrie 2D considérée.

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ \text{div}(\sigma \nabla u) + \omega^2 \varsigma u = f \quad \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (1.22)$$

Ci-dessus  $\omega > 0$  désigne toujours la fréquence. Pour faire le lien avec les équations (1.8)-(1.9) (en dimension 2), le triplet  $(u, \sigma, \varsigma)$  de l'équation (1.22) correspondrait à  $(H_z, \varepsilon^{-1}, \mu)$  ou  $(E_z, \mu^{-1}, \varepsilon)$ . On suppose

$$\sigma := \begin{cases} \sigma_1 > 0 & \text{dans } \Omega_1 \\ \sigma_2 < 0 & \text{dans } \Omega_2 \end{cases}, \quad \varsigma := \begin{cases} \varsigma_1 > 0 & \text{dans } \Omega_1 \\ \varsigma_2 > 0 & \text{dans } \Omega_2 \end{cases}.$$

Le rapport  $\kappa_\sigma := \sigma_2/\sigma_1 < 0$  est appelé contraste.

De façon classique, la formulation variationnelle du problème (1.22) s'écrit :

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ a(u, v) + c(u, v) = l(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ \text{avec } a(v, w) := \int_{\Omega} \sigma \nabla v \cdot \overline{\nabla w} \, d\mathbf{x}, \quad c(v, w) := - \int_{\Omega} \omega^2 \varsigma v \overline{w} \, d\mathbf{x}, \quad \forall (v, w) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega), \\ l(v) := \langle -f, v \rangle_{\Omega}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right. \quad (1.23)$$

L'objectif est d'étudier l'existence et l'unicité de la solution pour le problème (1.22)-(1.23). Lorsque  $\sigma > 0$ , l'étude du problème (1.23) est classique et relève de l'alternative de Fredholm. En effet, on montre que la forme  $a$  est coercive sur  $H_0^1(\Omega)$ , et comme le théorème de Rellich nous donne que l'injection de  $H_0^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$  est compacte, on montre que la forme  $c$  est une perturbation compacte de  $a$ . On parle de problème bien posé au sens de Fredholm. Dans le cas où  $\omega = 0$ , on conclut directement au caractère bien posé du problème (1.23) avec le théorème de Lax-Milgram. On déduit que le problème admet une unique solution en dehors d'une suite de fréquences  $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$  au plus dénombrable. Plus précisément les  $\omega_n^2$  sont les valeurs propres positives de multiplicité finie du problème :

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } (u, \lambda) \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} \times \mathbb{C} \text{ tels que :} \\ - \text{div}(\sigma \nabla u) = \lambda \varsigma u \quad \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (1.24)$$

Dès que  $\sigma$  change de signe, la coercivité de  $a$  est perdue et donc les outils utilisés ci-dessus ne s'appliquent plus. En effet, on peut construire des fonctions  $u \in H_0^1(\Omega)$  telles que  $a(u, u) = 0$  : on peut prendre par exemple  $\phi_i \in H_0^1(\Omega_i)$ ,  $i = 1, 2$ , et l'on pose  $u|_{\Omega_1} = \alpha_1 \phi_1$ ,  $u|_{\Omega_2} = \alpha_2 \phi_2$  avec

$$\alpha_1 := \sqrt{|\sigma_2|} \|\phi_2\|_{H_0^1(\Omega_2)} \text{ et } \alpha_2 := \sqrt{\sigma_1} \|\phi_1\|_{H_0^1(\Omega_1)}.$$

Cependant tout espoir n'est pas perdu, notamment grâce à une méthode développée depuis quelques années, la méthode de la T-coercivité. Cette méthode a été introduite avec la thèse de C. M. Zwölf encadrée par A.-S. Bonnet-Ben Dhia et P. Ciarlet Jr. [137], et elle consiste en la construction d'isomorphismes  $\mathbf{T}$  de  $H_0^1(\Omega)$  tels que la forme  $a(\cdot, \mathbf{T}\cdot)$  soit coercive : on dit que la forme  $a$  est T-coercive. Si un tel opérateur  $\mathbf{T}$  existe, alors le problème "Trouver  $u \in H_0^1(\Omega)$  tel que  $a(u, \mathbf{T}v) + c(u, \mathbf{T}v) = l(\mathbf{T}v)$  pour tout  $v \in H_0^1(\Omega)$ " est de type Fredholm. Comme ce problème est équivalent au problème (1.23), ce dernier est donc de type Fredholm. La difficulté réside donc dans l'existence et la construction d'un tel opérateur. Le but de cette partie est de donner quelques éléments pour en construire. Nous allons commencer avec un cas simple, le cas d'un domaine symétrique.

**Remarque 1.6.** *Nous nous concentrons sur l'étude du problème continu. Les questions de discrétisation font l'objet du chapitre 2.*

### 1.3.2 Construction d'un opérateur $\mathbf{T}$ pour un domaine symétrique

On suppose que  $\Sigma$  est simplement un segment, et que le domaine  $\Omega$  est symétrique par rapport à l'interface. En d'autres termes  $\Omega_2$  est le symétrique de  $\Omega_1$  par rapport à  $\Sigma$  (voir Figure 1.12 pour un exemple). Sans perdre en généralités, supposons que  $\Sigma := \{0\} \times [0, L]$ ,  $L > 0$ . Dans cette section on considère le problème (1.23) avec  $c = 0$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Soit } f \in H^{-1}(\Omega). \text{ Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{array} \right. \quad (1.25)$$

On définit aussi l'opérateur associé à la forme bilinéaire  $a$ ,  $A : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$  tel que  $Au = -\operatorname{div}(\sigma \nabla u)$  : (1.25) est équivalent au problème "Trouver  $u \in H_0^1(\Omega)$  tel que  $Au = f$  dans  $\Omega$ ". Dans ce cas le problème (1.25) est bien posé si et seulement si  $\kappa_\sigma \neq -1$  [15]. Pour cela il suffit de considérer, pour tout  $v \in H_0^1(\Omega)$  les opérateurs

$$\mathbf{T}v(x, y) = \begin{cases} v_1(x, y) & \text{dans } \Omega_1 \\ -v_2(x, y) + 2\mathbf{S}v_1(x, y) & \text{dans } \Omega_2 \end{cases}, \text{ et } \mathbf{T}'v(x, y) = \begin{cases} v_1(x, y) - 2\mathbf{S}v_2(x, y) & \text{dans } \Omega_1 \\ -v_2(x, y) & \text{dans } \Omega_2 \end{cases}, \quad (1.26)$$

avec  $\mathbf{S}$  un opérateur réalisant la symétrie par rapport à  $\Sigma$  :  $\mathbf{S}v_1(x, y) = v_1(-x, y)$  et  $\mathbf{S}v_2(x, y) = v_2(-x, y)$ . Avec  $\mathbf{T}$  et  $\mathbf{T}'$  on montre que si  $\kappa_\sigma \neq -1$ , alors  $a$  est T-coercive (suivre la démonstration de la proposition 1.1). Maintenant si  $\kappa_\sigma = -1$ , on peut construire une infinité de solutions du problème homogène : cela signifie que l'opérateur  $A$  possède un noyau de dimension infinie (donc il n'est pas Fredholm [113]). Pour cela on considère  $g \in H_{00}^{1/2}(\Sigma)$ , c'est-à-dire un élément de  $H^{1/2}(\Sigma)$  tel que son prolongement par 0 sur toute la droite  $x = 0$  est un élément de  $H^{1/2}(\mathbb{R})$ . Pour  $i = 1, 2$ , on considère  $u_i \in H_{0, \Gamma_i}^1(\Omega)$  tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u_i = 0 \quad \text{dans } \Omega_i, \\ u_i = 0 \quad \text{sur } \Gamma_i, \\ u_i = g \quad \text{sur } \Sigma. \end{array} \right.$$

Pour  $i = 1, 2$ ,  $u_i$  est unique. De plus par symétrie nous avons  $u_2(x, y) = u_1(-x, y)$  presque partout dans  $\Omega_2$ . Il vient  $\sigma_1 \partial_n u_1 - \sigma_2 \partial_n u_2 = \sigma_1 (\partial_x u_1 + \partial_x u_2) = 0$  presque partout sur  $\Sigma$ . Donc l'élément  $u \in H_0^1(\Omega)$  tel que  $u|_{\Omega_i} = u_i$ ,  $i = 1, 2$  satisfait  $\operatorname{div}(\sigma \nabla u) = 0$  dans  $\Omega$ . Comme  $\tilde{H}^{1/2}(\Sigma)$  est un espace vectoriel de dimension infinie, on peut donc construire une infinité d'éléments de  $\ker A$ .

L'idée de compenser le changement de signe de  $\sigma$  en prenant  $-v_2$  dans (1.26) semble naturelle. Cependant cela n'est pas suffisant car à l'interface la fonction n'est pas  $H^1$  : l'intérêt de (1.26) est de compenser ce changement de signe tout en assurant le raccord en trace le long de  $\Sigma$ . La démarche générale de la T-coercivité est de construire des opérateurs similaires à (1.26) pour des géométries quelconques, de la forme

$$Tv(x, y) = \begin{cases} v_1(x, y) & \text{dans } \Omega_1, \\ -v_2(x, y) + 2Rv_1(x, y) & \text{dans } \Omega_2, \end{cases} \quad T'v(x, y) = \begin{cases} v_1(x, y) - 2R'v_2(x, y) & \text{dans } \Omega_1, \\ -v_2(x, y) & \text{dans } \Omega_2. \end{cases} \quad (1.27)$$

avec  $R, R'$  des opérateurs à préciser, tels que  $Rv_1|_\Sigma = v_1|_\Sigma$  et  $R'v_2|_\Sigma = v_2|_\Sigma$ . Si de tels opérateurs  $R, R'$  existent, alors on vérifie aisément que  $T$  est un isomorphisme de  $H_0^1(\Omega)$  car  $(T \circ T)v = v$  pour tout  $v \in H_0^1(\Omega)$ . Comment choisir  $R$  et  $R'$ ? Plusieurs types d'opérateurs ont été proposés, nous en dressons un rapide historique dans la section suivante puis nous présentons la démarche générale.

**Remarque 1.7.** *Le cas  $\kappa_\sigma = -1$  sera appelé cas critique. Nous allons voir que quelque soit la configuration considérée, le problème est toujours mal posé pour  $\kappa_\sigma = -1$ . Encore une fois, la particularité du cas critique est à rapprocher du rôle de  $\omega_{sp}$  pour les problèmes en électromagnétisme.*

### 1.3.3 Construction des opérateurs $R, R'$

Rappelons que le formalisme de T-coercivité a été introduit dans [22] avec la thèse de C. M. Zwölf en 2008 [137]. On y construit des opérateurs de la forme (1.27), avec  $R$  un opérateur de  $H_{00}^{1/2}(\Sigma)$  – l'espace des traces sur  $\Sigma$  des fonctions de  $H_0^1(\Omega)$  – à valeurs dans  $H_{0,\Gamma_2}^1(\Omega)$ . Cet opérateur n'agit que sur la trace de  $v_1$ , de plus on choisit  $R(v_1|_\Sigma)$  harmonique dans  $\Omega_2$  tel que  $R(v_1|_\Sigma) = v_1$  sur  $\Sigma$ . De même on définit  $R'$  un opérateur de  $H_{00}^{1/2}(\Sigma)$  dans  $H_{0,\Gamma_1}^1(\Omega)$  harmonique dans  $\Omega_1$  assurant le raccord en  $\Sigma$ . Avec ces opérateurs, il est montré que le problème type (1.23) est Fredholm si  $|\kappa_\sigma|$  est *suffisamment grand* ou *suffisamment petit*.

Par la suite, S. Nicaise et J. Venel en 2011 [105] proposent une méthode alternative pour une géométrie particulière : le cas d'un carré, avec  $\Omega_2$  un des quadrants du carré. On construit un opérateur  $R$  (ainsi qu'un opérateur  $R'$ ) global, c'est-à-dire qui agit de  $H_{0,\Gamma_1}^1(\Omega)$  dans  $H_{0,\Gamma_2}^1(\Omega)$  (respectivement de  $H_{0,\Gamma_2}^1(\Omega)$  dans  $H_{0,\Gamma_1}^1(\Omega)$ ). L'opérateur  $R$  est explicite, et est construit à base des symétries axiales par rapport à l'interface  $\Sigma$ . On peut montrer dans ce cas que le problème (1.25) est bien posé si le contraste  $\kappa_\sigma \notin [-3; -1/3]$ . Cet intervalle avait été mis en évidence auparavant dans [56, 24].

Dans le même temps, la thèse de L. Chesnel encadrée par A.-S. Bonnet-Ben Dhia et P. Ciarlet Jr. [38] a permis de considérablement clarifier et développer cette méthode, pour les problèmes de type (1.23) [15, 40, 18]. Comme dans [105], on construit des opérateurs  $R$  (et  $R'$ ) qui agissent globalement de  $H_{0,\Gamma_1}^1(\Omega)$  dans  $H_{0,\Gamma_2}^1(\Omega)$  (respectivement  $H_{0,\Gamma_2}^1(\Omega)$  dans  $H_{0,\Gamma_1}^1(\Omega)$ ). Dans ce cas on montre que le problème (1.25) est bien posé si le contraste  $\kappa_\sigma$  n'appartient pas à un intervalle  $I_c$ , dont les bornes dépendent de  $R$  et  $R'$ . La proposition 1.1 permet d'en comprendre le principe. La nouveauté est que l'on peut construire explicitement de tels opérateurs, et ce pour une géométrie quelconque. Dans le cas d'un secteur d'angle droit, on retrouve l'intervalle  $[-3; -1/3]$ . Si la géométrie n'est pas "simple" ( $\Sigma$  est un polygone courbe par exemple), il s'avère que montrer le caractère bien posé est trop restrictif, cependant on peut établir le caractère Fredholm. Cela nécessite d'utiliser un processus de localisation au voisinage de l'interface (nous reviendrons sur cette méthode dans le chapitre 2).

Présentons plus en détails le principe de cette dernière approche. Nous présenterons ensuite la construction des opérateurs  $R$  et  $R'$  pour un secteur angulaire borné (voir Figure 1.12).

On considère le problème (1.25) et les opérateurs définis par (1.27), avec  $R$  un opérateur linéaire

continu de  $H_{0,\Gamma_1}^1(\Omega)$  dans  $H_{0,\Gamma_2}^1(\Omega)$  tel que  $(\mathbf{R}u_1)|_\Sigma = u_1|_\Sigma$ , et  $\mathbf{R}'$  un opérateur linéaire continu de  $H_{0,\Gamma_2}^1(\Omega)$  dans  $H_{0,\Gamma_1}^1(\Omega)$  tel que  $(\mathbf{R}'u_2)|_\Sigma = u_2|_\Sigma$ . On définit par ailleurs les normes d'opérateur

$$\|\mathbf{R}\|^2 := \sup_{w \in H_{0,\Gamma_1}^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\|\nabla(\mathbf{R}w)\|_{\Omega_2}^2}{\|\nabla w\|_{\Omega_1}^2}, \quad \|\mathbf{R}'\|^2 := \sup_{w \in H_{0,\Gamma_2}^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\|\nabla(\mathbf{R}'w)\|_{\Omega_1}^2}{\|\nabla w\|_{\Omega_2}^2}. \quad (1.28)$$

**Proposition 1.1.** *Si  $\kappa_\sigma \notin [-\|\mathbf{R}'\|^2; -1/\|\mathbf{R}\|^2]$  alors le problème (1.25) est bien posé.*

**Preuve.** Soit  $\kappa_\sigma \in ]-1/\|\mathbf{R}\|^2; 0[$ . Considérons d'abord l'opérateur  $\mathbf{T}$  défini par (1.27). Celui-ci est bien un isomorphisme de  $H_0^1(\Omega)$  et pour tout  $u \in H_0^1(\Omega)$  nous avons

$$\begin{aligned} a(u, \mathbf{T}u) &= (\sigma \nabla u, \nabla(\mathbf{T}u))_\Omega \\ &= \sigma_1(\nabla u_1, \nabla u_1)_{\Omega_1} + |\sigma_2|(\nabla u_2, \nabla u_2)_{\Omega_2} - 2|\sigma_2|(\nabla u_2, \nabla(\mathbf{R}u_1))_{\Omega_2}. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Young valable pour  $\eta > 0$  nous obtenons

$$a(u, \mathbf{T}u) \geq \sigma_1(\nabla u_1, \nabla u_1)_{\Omega_1} + |\sigma_2|(\nabla u_2, \nabla u_2)_{\Omega_2} - \eta|\sigma_2|(\nabla u_2, \nabla u_2)_{\Omega_2} - \frac{|\sigma_2|}{\eta}(\nabla(\mathbf{R}u_1), \nabla(\mathbf{R}u_1))_{\Omega_2}.$$

En utilisant (1.28) nous avons alors

$$a(u, \mathbf{T}u) \geq \left(\sigma_1 - \frac{|\sigma_2|}{\eta}\|\mathbf{R}\|^2\right)(\nabla u_1, \nabla u_1)_{\Omega_1} + |\sigma_2|(1 - \eta)(\nabla u_2, \nabla u_2)_{\Omega_2}.$$

La forme  $a$  est alors  $\mathbf{T}$ -coercive dans  $H_0^1(\Omega)$  si l'on peut choisir  $\eta$  tel que  $(\sigma_1 - |\sigma_2|\eta^{-1}\|\mathbf{R}\|^2) > 0$  et  $|\sigma_2|(1 - \eta) > 0$ , c'est-à-dire tel que  $|\kappa_\sigma|\|\mathbf{R}\|^2 < \eta < 1$ . Ceci est possible puisque  $|\kappa_\sigma|\|\mathbf{R}\|^2 < 1$ .

Soit  $\kappa_\sigma \in ]-\infty; -\|\mathbf{R}'\|^2[$ . En procédant de même avec l'opérateur  $\mathbf{T}'$ , on obtient cette fois

$$a(u, \mathbf{T}'u) \geq \sigma_1(1 - \eta)(\nabla u_1, \nabla u_1)_{\Omega_1} + \left(|\sigma_2| - \frac{\sigma_1}{\eta}\|\mathbf{R}'\|^2\right)(\nabla u_2, \nabla u_2)_{\Omega_2}.$$

La forme  $a$  est alors  $\mathbf{T}$ -coercive dans  $H_0^1(\Omega)$  si l'on peut choisir  $\eta$  tel que  $|\kappa_\sigma|\|\mathbf{R}'\|^{-2} > \eta^{-1} > 1$  ce qui est le cas puisque  $|\kappa_\sigma|\|\mathbf{R}'\|^{-2} > 1$ .  $\square$

Le but est donc de trouver les opérateurs  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{R}'$  de norme minimale afin d'obtenir le plus petit intervalle possible. Si de plus on montre que le problème n'est pas bien posé pour  $\kappa_\sigma \in [-\|\mathbf{R}'\|^2; -1/\|\mathbf{R}\|^2]$ , alors les opérateurs  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{R}'$  sont dits optimaux, et l'intervalle  $I_c := [-\|\mathbf{R}'\|^2; -1/\|\mathbf{R}\|^2]$  est appelé intervalle critique.

Explicitons ces opérateurs pour les deux configurations de la figure 1.12. On retrouve évidemment les résultats du cas symétrique (voir §1.3.2) : si le domaine est symétrique par rapport à  $\Sigma$ , alors les candidats naturels pour  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{R}'$  sont l'opérateur  $\mathbf{S}$  précédent, alors

$$\|\mathbf{R}\|^2 = \|\mathbf{R}'\|^2 = 1,$$

et  $I_c$  est réduit au singleton  $\{-1\}$ .

Lorsque l'interface présente des coins, l'idée développée dans [15] est la suivante : définir un opérateur à base d'une transformation géométrique, à savoir la composée d'une symétrie centrale et d'une dilatation/compression angulaire. Soit  $R > 0$ , on définit  $\Omega := \{(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \mid 0 \leq \rho < R, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ , avec  $(\rho, \theta)$  les coordonnées polaires,  $\Omega_1 := \{(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \mid 0 \leq \rho < R, 0 < \theta < \alpha\}$  et

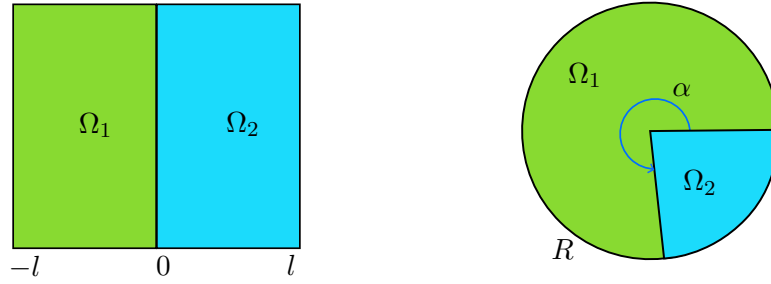


FIGURE 1.12 – Exemples de géométries considérées : à gauche un domaine symétrique avec une interface plane, à droite un secteur angulaire borné.

$\Omega_2 := \{(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \mid 0 \leq \rho < R, \alpha < \theta < 2\pi\}$ ,  $\alpha \in ]0; 2\pi[$  (voir Figure 1.12). Les opérateurs sont alors définis comme suit

$$\mathbf{R}u_1(\rho, \theta) = u_1\left(\rho, \frac{\alpha}{\alpha - 2\pi}(\theta - 2\pi)\right) \quad \text{dans } \Omega_2, \quad \mathbf{R}'u_2(\rho, \theta) = u_2\left(\rho, \frac{\alpha - 2\pi}{\alpha}\theta + 2\pi\right) \quad \text{dans } \Omega_1.$$

On montre facilement que

$$\|\mathbf{R}\|^2 \leq I_\alpha, \quad \|\mathbf{R}'\|^2 \leq I_\alpha, \quad \text{avec } I_\alpha := \max\left(\frac{\alpha}{2\pi - \alpha}; \frac{2\pi - \alpha}{\alpha}\right). \quad (1.29)$$

En effet, pour tout  $u_1 \in H_{0,\Gamma_1}^1(\Omega)$ , et en utilisant le changement de variables  $(r, \varphi) = (\rho, \frac{\alpha}{\alpha - 2\pi}(\theta - 2\pi))$  nous avons

$$\begin{aligned} \|\nabla(\mathbf{R}u_1)\|_{\Omega_2}^2 &= \int_0^R \int_\alpha^{2\pi} \left(\frac{\partial \mathbf{R}u_1(\rho, \theta)}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \mathbf{R}u_1(\rho, \theta)}{\partial \theta}\right)^2 \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^R \int_0^\alpha \frac{2\pi - \alpha}{\alpha} \left(\frac{\partial u_1(r, \varphi)}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \frac{\alpha}{2\pi - \alpha} \left(\frac{\partial u_1(r, \varphi)}{\partial \varphi}\right)^2 r dr d\varphi \\ &\leq I_\alpha \|\nabla u_1\|_{\Omega_1}^2. \end{aligned}$$

Un calcul similaire donne le résultat pour la norme de  $\mathbf{R}'$ . Notons que  $I_\alpha \geq 1$ . Avec (1.29) et la proposition 1.1, on en déduit que si  $\kappa_\sigma \notin [-I_\alpha; -1/I_\alpha]$  alors le problème (1.25) est bien posé. En fait le théorème 6.4 de [15] établit la réciproque, à savoir que pour  $\kappa_\sigma \in [-I_\alpha; -1/I_\alpha]$  l'opérateur  $A$  associé à la forme  $a$  n'est pas Fredholm à cause de l'apparition de singularités aux coins [119, 56] (nous y reviendrons dans cette thèse). On peut donc définir l'intervalle critique  $I_c := [-I_\alpha; -1/I_\alpha]$ . L'intervalle  $I_c$  contient toujours le cas critique  $\kappa_\sigma = -1$ . Lorsque  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $I_c \rightarrow \mathbb{R}^-$  tandis que  $I_c \rightarrow \{-1\}$  lorsque  $\alpha \rightarrow \pi$ .

Avec ces deux opérateurs, il est alors possible de traiter une interface polygonale quelconque : à l'aide de fonctions de troncature formant une partition de l'unité au voisinage de l'interface, on utilise au voisinage d'une droite ou d'un coin les opérateurs (1.27) faisant intervenir soit les symétries, soit les dilatations angulaires. Dans ce cas l'intervalle critique s'écrit  $I_c := [-I_{\alpha_{\min}}; -1/I_{\alpha_{\min}}]$ , avec  $I_{\alpha_{\min}}$  défini par (1.29),  $\alpha_{\min}$  désignant l'angle au coin le plus aigu.

**Remarque 1.8.** Dans toute la suite nous continuerons de noter  $I_c := [-I_\alpha; -1/I_\alpha]$ ,  $\alpha$  désignant le cas échéant l'angle le plus aigu.

**Remarque 1.9.** En utilisant les résultats précédents, on en déduit que le problème (1.22) est Fredholm si et seulement si  $\kappa_\sigma \notin I_c := [-I_\alpha; -1/I_\alpha]$ .

**Remarque 1.10.** *L'intervalle critique est en fait lié aux Jacobiennes des transformations géométriques effectuées pour construire les opérateurs  $\mathbf{R}$ .*

Avant de continuer plus loin, il est intéressant de faire des correspondances entre le problème mathématique étudié dans la section 1.3 et l'analyse des plasmons de surface dans la section 1.2.

### 1.3.4 Le lien avec les plasmons de surface

Dans la section 1.3 nous avons mentionné que pour l'équation de (1.22), le triplet  $(u, \sigma, \varsigma)$  pouvait correspondre au triplet  $(H_z, \varepsilon^{-1}, \mu)$  (3). Si l'on considère un problème de transmission entre un métal non absorbant et un diélectrique, la fonction  $\varepsilon$  dépend de la fréquence  $\omega$ , et le problème (1.22) se réécrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ \operatorname{div}(\varepsilon^{-1}(\omega)\nabla u) + \omega^2\mu u = f \quad \text{dans } \Omega. \end{array} \right.$$

On peut donc associer à l'intervalle critique  $I_c$  un intervalle de fréquences critiques. Pour le modèle de Drude sans dissipation celui-ci est donné par :

$$\kappa_\varepsilon \in I_c := \left[ -I_\alpha; -\frac{1}{I_\alpha} \right] \Leftrightarrow \omega \in \left[ \omega_p \sqrt{1 + \frac{1}{I_\alpha \varepsilon_d}}; \omega_p \sqrt{1 + \frac{I_\alpha}{\varepsilon_d}} \right].$$

La fréquence plasmon joue un rôle central dans le changement de comportement des plasmons de surface (voir Figure 1.4), de même que le contraste  $-1$  pour la caractérisation des singularités. Il sera utile de distinguer deux intervalles :

$$\kappa_\varepsilon \in [-I_\alpha; -1[, \text{ ou } \kappa_\varepsilon \in ]-1; -1/I_\alpha] \Leftrightarrow \omega \in \left[ \omega_p \sqrt{1 + \frac{1}{I_\alpha \varepsilon_d}}; \omega_{\text{sp}} \right], \text{ ou } \omega \in \left] \omega_{\text{sp}}; \omega_p \sqrt{1 + \frac{I_\alpha}{\varepsilon_d}} \right[.$$

Nous avons évoqué ci-dessus que lorsque le contraste est choisi dans  $I_c$ , des singularités apparaissent aux coins. Nous verrons que ces singularités sont de plus en plus fortes (notamment oscillantes) proche du contraste  $-1$  : en fait elles mettent en jeu des ondes de type plasmons de surface (voir remarque 1.11), et comme illustré par exemple par la Figure 1.4, ces plasmons seront de plus en plus oscillants dès que l'on se rapproche de  $\omega_{\text{sp}}$ . Ce jeu de correspondances sera souvent utilisé dans le chapitre 3.

**Remarque 1.11.** *Remarquons que d'après l'étude menée dans la section 1.2, lorsque l'interface entre les deux milieux est plane, les plasmons n'existent que lorsque  $\omega < \omega_{\text{sp}}$ , sinon ce sont des ondes évanescentes à l'infini (voir Figure 1.4). Comme mentionné à la remarque 1.5 nous verrons que les singularités obtenues lorsque  $\kappa_\varepsilon \in ]-1; -1/I_\alpha]$ , soit pour  $\omega \in \left] \omega_{\text{sp}}; \omega_p \sqrt{1 + \frac{I_\alpha}{\varepsilon_d}} \right[$  exhibent tout de même un comportement de type plasmon de surface. Ceci vient du fait que les singularités sont solutions d'un problème du type "quasi-statique" (posé dans un domaine borné).*

---

3. Notons que la condition  $u = 0$  sur  $\partial\Omega$  est une condition de conducteur parfait, condition satisfaite par le champ électrique. En ce sens les problèmes ne sont pas équivalents mais les démarches restent similaires. En outre, nous pouvons montrer le caractère Fredholm les problèmes avec des conditions aux limites de Neumann en utilisant les mêmes opérateurs de T-coercivité. Il suffit de se placer dans  $H_\Sigma^1(\Omega)$  [38, Chapitre 1], l'espace des fonctions de  $H^1(\Omega)$  à moyenne nulle sur l'interface  $\Sigma$ , espace "naturel" pour  $H_z$ .



### 1.3.5 La question des coins

Pour l'étude de problèmes de transmission avec changement de signe (1.23), en utilisant la T-coercivité nous pouvons distinguer deux cas : le cas  $\kappa_\sigma \notin I_c$ , que nous appellerons cas "Hors Intervalle Critique" (HIC), et le cas "Dans l'Intervalle Critique" (DIC) lorsque  $\kappa_\sigma \in I_c$ . L'approche de T-coercivité présentée ci-dessus est relativement complète et permet d'étudier une grande partie de problèmes de transmission scalaires, ainsi que pour les équations de Maxwell [20, 21, 39, 16, 17]. L'une des difficultés (en plus du changement de signe) dans l'étude de tels problèmes est le traitement des coins (théorique comme numérique). Nous finissons ce chapitre en annonçant quelques extensions et applications que nous proposons dans cette thèse, qui concernent principalement l'étude des coins.

- ★ Approximation du problème (HIC) : nous avons vu que dans ce cas le problème type (1.22) est Fredholm dans  $H_0^1(\Omega)$ . Qu'en est-il de l'approximation numérique ? Abordée dans [22, 105, 40], la question est : peut-on trouver un opérateur défini sur les espaces d'approximation éléments finis réalisant la T-coercivité au niveau discret ? Si oui, il faut s'assurer que les maillages sont conformes pour obtenir la convergence des méthodes numériques. Si l'on note  $(V^h)_h$  la famille d'espaces discrets de  $H_0^1(\Omega)$ , on aura besoin que les maillages soient T-conformes, c'est-à-dire que  $\mathbf{T}(V^h) \subset V^h$ . Bien que toute interface puisse être gérée pour le problème continu, pour la discrétisation le cas des coins pose un certain problème : ceci est dû au fait que les dilatations angulaires ne sont pas des fonctions affines et qu'elles ne transportent donc pas les propriétés des fonctions éléments finis. Nous proposons dans le chapitre 2 une méthode à base de pavages permettant d'assurer la T-conformité du maillage, pour une géométrie quelconque.
- ★ Étude d'un problème type (1.22) (DIC) : lorsque  $\kappa_\sigma \in I_c$ , le problème n'est pas bien posé dans les espaces classiques  $H^1$  à cause de l'apparition de singularités aux coins [119, 56]. Pour le problème (1.25), les auteurs de [18] ont proposé un nouveau cadre fonctionnel qui prend en compte ces singularités dans lequel le problème est bien posé. Ce travail a été réalisé pour une géométrie particulière (avec un angle droit) où l'on peut calculer explicitement ces singularités. Nous proposons notamment dans le chapitre 3 d'étudier ces singularités pour d'autres configurations et pour l'équation "complète" (avec le terme en  $\omega^2$ ) dans un domaine non borné : l'étude d'un problème de diffraction. À notre connaissance, les problèmes en domaine non borné ne semblent pas avoir été étudiés via la T-coercivité, de plus la partie compacte  $c$  de (1.22) (omise dans les problèmes (1.25)) s'avère jouer un rôle non négligeable sur la solution du problème. Nous développons une méthode numérique originale avec des éléments finis proposée dans [38] pour approcher la solution lorsque  $\kappa_\sigma \in I_c$ .
- ★ Application aux guides d'ondes plasmoniques (scalaires et Maxwell) : le problème (1.23) peut être vu comme le problème direct associé au problème de valeurs propres (1.24). Lorsque  $\kappa_\sigma \notin I_c$ , on peut montrer que l'opérateur associé à (1.24) est à résolvante compacte, avec les résultats du chapitre 2 et en suivant [4, 110], il est possible d'obtenir les estimations d'erreurs sur l'approximation des valeurs propres. Lorsque  $\kappa_\sigma \in I_c$ , la présence de singularités aux coins nous complique la tâche. En s'inspirant de l'étude menée dans le chapitre 3 nous proposons de trier les valeurs propres en prenant en compte ces singularités. Ce travail fait l'objet du chapitre 4. Une fois le problème de guide d'ondes scalaire étudié, nous chercherons les modes guidés dans un guide d'ondes plasmonique gouverné par les équations de Maxwell. Ce travail combine en fait les résultats obtenus pour les problèmes de transmission avec changement de signe pour les équations de Maxwell [38, 16, 17] et ceux pour les problèmes scalaires. Ceci fait l'objet du chapitre 5.

**Remarque 1.12.** *Dans tout le reste de ce mémoire, le cas critique sera toujours exclu. Ce cas est particulièrement problématique en termes d'étude mathématique (tant en régime fréquentiel qu'en régime*

*temporel), mais il n'en est pas moins délaissé (par exemple [108, 68, 38, 35, 103, 129]). Le cas critique est particulièrement intéressant lorsque l'on travaille avec non pas des métaux mais des métamatériaux à indice négatif [124, 1], ce qui permet entre autres la construction de lentilles "parfaites" [114].*

## CHAPITRE

# 2

# MESH REQUIREMENTS FOR THE FINITE ELEMENT APPROXIMATION OF PROBLEMS WITH SIGN-CHANGING COEFFICIENTS

Ce chapitre fait l'objet d'une publication (cf. [13]). Quelques extensions et remarques (qui ne sont pas dans l'article) sont présentées dans la section 2.B. Tout le chapitre est rédigé en anglais.

## Contents

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction and setting of the problem . . . . .</b>	<b>32</b>
<b>2.2</b>	<b>Historical background and motivation . . . . .</b>	<b>33</b>
<b>2.3</b>	<b>T-coercivity and T-conforming meshes around corners . . . . .</b>	<b>35</b>
<b>2.4</b>	<b>Well-posedness . . . . .</b>	<b>40</b>
<b>2.5</b>	<b>Approximation by conforming discretizations . . . . .</b>	<b>46</b>
<b>2.6</b>	<b>Numerical experiments . . . . .</b>	<b>49</b>
<b>2.7</b>	<b>Concluding remarks . . . . .</b>	<b>50</b>
<b>2.A</b>	<b>Appendix . . . . .</b>	<b>52</b>
2.A.1	General construction of R around corners . . . . .	52
2.A.2	Some technical results . . . . .	56
2.A.3	Uniform local Finite Element estimate . . . . .	58
<b>2.B</b>	<b>Some extensions . . . . .</b>	<b>59</b>
2.B.1	The treatment of curved interfaces . . . . .	59
2.B.2	Inf-sup condition with the T-coercivity and proof of theorem 2.1 . . . . .	60

---

**Abstract:** Transmission problems with sign-changing coefficients occur in electromagnetic theory in the presence of negative materials surrounded by classical materials. With the help of the T-coercivity theory we provide meshing rules to guarantee optimal convergence rate for the finite element approximation of those transmission problems. For general geometries, establishing Fredholmness of the continuous problem is well-understood thanks to the T-coercivity approach. However this approach does not carry over to the discrete case, except for special geometries, precisely interfaces without corners. We propose an alternative treatment at the

corners of the interface to design admissible finite element spaces and then recover standard error estimates. This new treatment relies on the use of simple geometrical transforms to define the meshes and the finite element spaces near the interface. Numerical results illustrate the importance of this new design.

**Keywords:** T-coercivity, transmission problem, sign-changing coefficient, conforming finite element method, T-conforming mesh.

## 2.1 Introduction and setting of the problem

Our aim is to solve the problem

$$\begin{cases} \text{Find } u \in H_0^1(\Omega) \text{ such that:} \\ -\operatorname{div}(\sigma \nabla u) = f \text{ in } \Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

where  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ( $d = 2, 3$ ) is a bounded domain partitioned into two regions,  $\sigma$  is a scalar, sign-changing coefficient, and  $f$  is some given data. In electromagnetic theory, this problem can be interpreted as a transmission problem, in a domain composed of a classical dielectric material ( $\sigma > 0$ ), and a negative material ( $\sigma < 0$ ). A negative material can be for example a metal at optical frequencies, or a metamaterial (e.g. [124, 1]), for which some physical parameters become negative. Due to the sign-changing coefficient  $\sigma$ , well-posedness of problem (2.1) is not guaranteed. In particular, classical tools such as Lax-Milgram theorem do not apply since the coercivity on  $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$  of the corresponding sesquilinear form  $a : (v, w) \mapsto \int_{\Omega} \sigma \nabla v \cdot \overline{\nabla w} d\Omega$  is lost. However, over the past decade, techniques have been developed to establish well-posedness, under appropriate conditions, via the T-coercivity theory: introduced in [22], it consists in building isomorphisms  $\mathbf{T}$  such that the form  $(v, w) \mapsto a(v, \mathbf{T}w)$  is coercive on  $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ . For short, we say that  $a(\cdot, \cdot)$  is *T-coercive*. What is less clear is the discrete counterpart of this approach.

In this paper, we consider problem (2.1) with the following hypothesis on  $\sigma$ :

$$\begin{cases} \sigma_1 := \sigma|_{\Omega_1} \text{ is a constant such that } \sigma_1 > 0, \\ \sigma_2 := \sigma|_{\Omega_2} \text{ is a constant such that } \sigma_2 < 0. \end{cases}$$

The ratio  $\kappa_{\sigma} := \sigma_2/\sigma_1$  is called the *contrast*. Further, we focus on 2D geometries, even if 3D geometries could be handled similarly [15]. Let  $\Omega$  be a *domain* of  $\mathbb{R}^2$ , that is a connected bounded open subset of  $\mathbb{R}^2$  with a Lipschitz boundary. It is split as  $\overline{\Omega} = \overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2}$ , where  $\Omega_1$  and  $\Omega_2$  are two disjoint domains. The interface separating  $\Omega_1$  and  $\Omega_2$  is called  $\Sigma$ : we assume that it is a polygonal line made of straight edges and corners. Given  $v$  defined on  $\Omega$ , we use the notation  $v_i := v|_{\Omega_i}$ ,  $i = 1, 2$ .

The equivalent variational formulation of (2.1) reads:

$$\text{Find } u \in V \text{ such that } \forall w \in V, a(u, w) = \langle f, w \rangle, \quad (2.2)$$

where  $V = H_0^1(\Omega)$  and  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denotes the duality pairing between  $V$  and its dual  $V'$ .

Let us first describe a simple configuration for which everything is well understood. It is the symmetric geometry:  $\Sigma$  is a part of a straight line and  $\Omega_2$  is the symmetric of  $\Omega_1$  with respect to  $\Sigma$ . Then one can easily prove that the problem is well-posed if and only if  $\kappa_{\sigma} \neq -1$ , by considering the following operators  $\mathbf{T}$ :

$$\mathbf{T}v = \begin{cases} v_1 & \text{in } \Omega_1 \\ -v_2 + 2\mathbf{S}v_1 & \text{in } \Omega_2 \end{cases}, \text{ respectively } \mathbf{T}v = \begin{cases} v_1 - 2\mathbf{S}v_2 & \text{in } \Omega_1 \\ -v_2 & \text{in } \Omega_2 \end{cases},$$

where  $\mathcal{S}v_1(x) = v_1(\mathcal{S}x)$ , with  $\mathcal{S}$  denoting the symmetry with respect to  $\Sigma$ . On one hand, one can prove that  $a(\cdot, \cdot)$  is T-coercive if  $\kappa_\sigma \neq -1$ . On the other hand, if  $\kappa_\sigma = -1$ , the problem (2.1) is ill-posed since it has a kernel (set of solutions with zero right-hand side  $f$ ) which is infinite dimensional. Thus we say that the condition  $\kappa_\sigma \neq -1$  is *optimal* for the well-posedness of the continuous problem.

Suppose now that  $\kappa_\sigma \neq -1$  and that we want to approximate the solution with a conforming finite element method (for short, a cFE method). This leads to the discrete problems

$$\text{Find } u^h \in V^h \text{ such that } \forall w^h \in V^h, \quad a(u^h, w^h) = \langle f, w^h \rangle, \quad (2.3)$$

where  $(V^h)_h$  denotes a sequence of finite-dimensional subspaces of  $V$ , with  $h$  a positive parameter that goes to 0. If  $\mathbb{T}(V^h) \subset V^h$  for small  $h$ , then T-coercivity can be exploited at the discrete level. In particular, the discrete problem is well-posed and, by a straightforward extension of C ea's lemma, the error is controlled by the best approximation error. Hence, we just have to ensure the condition  $\mathbb{T}(V^h) \subset V^h$ , which is achieved in this symmetric geometry by using a symmetric mesh. When  $\mathbb{T}(V^h) \subset V^h$ , we say that the mesh is *T-conforming*. Let us emphasize that using non-symmetric meshes can deteriorate drastically the convergence of the cFE method when  $\kappa_\sigma$  is close to  $-1$  (cf. [40]).

The general objective of our paper is to generalize this type of result. More precisely, our aim is to provide meshing rules for an arbitrary geometry, ensuring that the standard convergence rate is recovered, as soon as  $\kappa_\sigma$  is such that the continuous problem (2.1) with sign-changing coefficients is well-posed.

The outline of the paper is as follows. In the next section, we provide a review of the techniques proposed so far to approximate the problem (2.1) with sign-changing coefficients. In section 2.3, we investigate the case of geometries that are invariant by (some) rotations. Then in section 2.4 we develop the theory that allows one to study the well-posedness of problem (2.1) with a sign-changing coefficient  $\sigma$ , and to derive the optimality condition on the contrast  $\kappa_\sigma$ . Our aim is to provide tools that can be extended to the discrete problems, namely the approximation of problem (2.1) by cFE methods. This is the main topic of section 2.5, where convergence is derived as soon as the optimality condition on the contrast is fulfilled. Numerical results are presented in section 2.6. Finally some concluding remarks are given.

## 2.2 Historical background and motivation

Let us define the function spaces  $V_i := \{v_i, v \in V\}$ ,  $i = 1, 2$ , respectively the discrete function spaces  $V_i^h := \{v_i^h, v^h \in V^h\}$ ,  $i = 1, 2$ . To our knowledge, the first general convergence result of a cFE method was proposed in [22]. In this paper, the operator  $\mathbb{T}^{(1)}$  realizing the T-coercivity is defined as

$$\mathbb{T}^{(1)} v = \begin{cases} v_1 & \text{in } \Omega_1 \\ -v_2 + 2\mathbb{R}(v_1|_\Sigma) & \text{in } \Omega_2 \end{cases} .$$

Here the operator  $\mathbb{R}$  acts from  $H_{00}^{1/2}(\Sigma)$  (the space of traces on  $\Sigma$  of functions of  $V$ ) to  $V_2$ . It is defined by the following two properties:  $\mathbb{R}(v_1|_\Sigma)$  is harmonic in  $\Omega_2$ , and  $\mathbb{R}(v_1|_\Sigma) = v_1$  on  $\Sigma$ . It was proven that T-coercivity is realized with  $\mathbb{T}^{(1)}$  under the condition that  $|\kappa_\sigma|$  is "small enough" (with no explicit bound). At the discrete step, the condition  $\mathbb{T}^{(1)}(V^h) \subset V^h$  was not sought. Instead, the idea was to introduce a discrete counterpart of the operator  $\mathbb{T}^{(1)}$ : for  $v^h \in V^h$ , one defines

$$\mathbb{T}_h^{(1)} v^h = \begin{cases} v_1^h & \text{in } \Omega_1 \\ -v_2^h + 2\mathbb{R}_h(v_1^h|_\Sigma) & \text{in } \Omega_2 \end{cases} ,$$

where  $\mathbf{R}_h(v_1^h|_\Sigma)$  is defined as the discrete-harmonic element of  $V_2^h$  with a trace on  $\Sigma$  equal to  $v_1^h|_\Sigma$ . It is furthermore proved in [22] that, for quasi-uniform meshes, under a condition on the contrast which is more restrictive than the one for the continuous problem, convergence of the cFE method is achieved. Obviously, in the symmetric geometry, this result is less satisfactory than the one obtained for the symmetry-based operator  $\mathbf{T}$ .

An alternative was next proposed in [105], where operators  $\mathbf{T}^{(2)}$  realizing  $\mathbf{T}$ -coercivity were sought in the following form

$$\mathbf{T}^{(2)} v = \begin{cases} v_1 & \text{in } \Omega_1 \\ -v_2 + 2\mathbf{R}v_1 & \text{in } \Omega_2 \end{cases} ,$$

with the discrete counterpart, for  $v^h \in V^h$ ,

$$\mathbf{T}_h^{(2)} v^h = \begin{cases} v_1^h & \text{in } \Omega_1 \\ -v_2^h + 2I_h(\mathbf{R}v_1^h) & \text{in } \Omega_2 \end{cases} .$$

Here the operator  $\mathbf{R}$  acts from  $V_1$  to  $V_2$  and  $I_h$  is a projection operator, with values in  $V_2^h$ .

Let us point out the difference between the two approaches: in  $\mathbf{T}^{(1)}$ ,  $\mathbf{R}$  acts on the trace of  $v_1$  on  $\Sigma$ , while in  $\mathbf{T}^{(2)}$ ,  $\mathbf{R}$  acts on the whole function  $v_1$ , defined on  $\Omega_1$ . The case of the symmetry-based operator  $\mathbf{S}$  fits into this second category but not in the first one. However, despite this analogy to the symmetric geometry, this second approach has the same drawback than the first one, at least for a general geometry: numerical convergence is not guaranteed even if the continuous problem is  $\mathbf{T}$ -coercive.

Interestingly, the authors of [105] exhibit a special geometry, different from the symmetric one, where the operator  $\mathbf{R}$  can be again built using symmetries. This is the case where  $\Omega$  is a square, and  $\Omega_1$  is one quadrant of this square (right-angle geometry). The definition of  $\mathbf{R}$  now only involves axial symmetries with respect to axes  $Ox_1$  and  $Ox_2$  (if the origin  $O$  is located at the center of  $\Omega$ ). For the continuous problem, this allows to prove the well-posedness if  $\kappa_\sigma \notin [-3; -1/3]$  (condition that has been proved to be optimal in [15]). Then at the discrete level, one doesn't have to introduce an operator  $I_h$ . Indeed, if the mesh is symmetric with respect to  $Ox_1$  and  $Ox_2$ , then the condition  $\mathbf{T}^{(2)}(V^h) \subset V^h$  is satisfied ( $\mathbf{T}$ -conforming mesh) and the *optimality of the approximation* is obtained: in other words, the convergence is ensured as soon as the continuous problem is well-posed.

Then, concerning the continuous problem, the case of an arbitrary geometry was completely clarified in [15]. The main conclusions are twofold. First, it appears that proving the well-posedness of (2.2) is too restrictive, and possible only for very simple cases. A more relevant objective is to ensure that the problem is well-posed in the Fredholm sense (see section 2.4). And it has been proved by a localization process that this property depends only on the value of the contrast  $\kappa_\sigma$  and on the geometry of the interface  $\Sigma$ , but not on the global geometry of  $\Omega$ . Precisely, for a given closed polygonal line  $\Sigma$  (possibly with curved edges), one can prove that problem (2.2) is well-posed in the Fredholm sense if and only if  $\kappa_\sigma \notin [-I_\alpha; -1/I_\alpha]$  where  $\alpha$  is the smallest corner angle of the polygonal line and

$$I_\alpha := \max\left(\frac{2\pi - \alpha}{\alpha}, \frac{\alpha}{2\pi - \alpha}\right).$$

This result remains true in the case where  $\Sigma$  is a polygonal line with endpoints on the boundary  $\partial\Omega$ , such that the corners' angles at the boundary measured in  $\Omega_1$  and in  $\Omega_2$  are equal (see section 2.3). What are the discrete counterparts of these results? First, since the global geometry of  $\Omega$  does not matter for the well-posedness (in the Fredholm sense) of the continuous problem, one can expect that the properties of the mesh "far from the interface"  $\Sigma$  should not matter either. In other words, can

one prove that a local T-conformity of the mesh around  $\Sigma$  is sufficient to ensure convergence of the cFE method as soon as the continuous problem is well-posed in the Fredholm sense?

A partial answer to this question has been given in [40, p. 17], where the following operator  $\mathbf{T}$  was introduced:

$$\mathbf{T}^{(3)}v_1 = \begin{cases} v_1 & \text{on } \Omega_1 \\ -v_2 + 2\chi\mathbf{R}v_1 & \text{on } \Omega_2 \end{cases},$$

where, thanks to the introduction of a cutoff function  $\chi$  (whose support coincides with a neighborhood of  $\Sigma$ ), the operator  $\mathbf{R}$  needs only to be defined with the help of local geometrical transforms, which map a part of  $\Omega_1$  to a part of  $\Omega_2$ . A discrete version is then considered there, which writes, for  $v^h \in V^h$ ,

$$\mathbf{T}_h^{(3)}v^h = \begin{cases} v_1^h & \text{in } \Omega_1 \\ -v_2^h + 2\chi_h\mathbf{R}v_1^h & \text{in } \Omega_2 \end{cases}, \quad (2.4)$$

with  $\chi_h$  the interpolation of  $\chi$  on  $V^h$ . In this framework, the constraint on the meshes boils down to a simple requirement: namely, that the mesh on  $\Omega_2$  is locally deduced from the mesh on  $\Omega_1$  by some geometrical transforms. This is the so-called *local T-conformity* of the mesh [40, Definition 10]. In principle, optimality of the cFE method follows. However, there are two shortcomings. The first one is technical, namely there is a mistake in the definition (2.4) of the discrete operator  $\mathbf{T}_h^{(3)}$ : as a matter of fact  $\chi_h\mathbf{R}v_1^h$  does not belong to  $V_2^h$  in general. The second shortcoming is that, except for special geometries such as the right-angle geometry described above, no interface with corners was tackled.

Let us explain the difficulty concerning the corners. In [15], the case where  $\Omega$  is a disk and  $\Omega_1$  is a sector of angle  $\alpha$  has been considered. For this simple configuration, one can build an operator of type  $\mathbf{T}^{(2)}$  using for the definition of the operator  $\mathbf{R}$  the composition of a central symmetry and an angular dilation. This construction is optimal in the sense that it allows us to prove the well-posedness for  $\kappa_\sigma \notin [-I_\alpha; -1/I_\alpha]$ . But let us emphasize that for such an operator  $\mathbf{T}^{(2)}$ , the condition  $\mathbf{T}^{(2)}(V^h) \subset V^h$  is never satisfied. Indeed, the angular dilation of a polynomial function is not a polynomial function. The question is then: is it possible to find another optimal construction of the operator  $\mathbf{T}$  such that for appropriate meshes there holds  $\mathbf{T}(V^h) \subset V^h$ , as it was the case with the axial symmetries for the right-angle geometry? This topic is addressed in §2.3.

More generally, for a polygonal interface, can we recover optimality of the cFE method under a generalized *local T-conformity* condition of the meshes? This is the subject of §2.4.

## 2.3 T-coercivity and T-conforming meshes around corners

In this section we consider a domain  $\Omega$  whose interface  $\Sigma$  separating  $\Omega_1$  and  $\Omega_2$  is a polygonal line with only one interior corner  $c$  of angle  $\alpha$  measured in  $\Omega_1$ , and two endpoints on the boundary  $\partial\Omega$ . Introduce  $(\rho, \theta)$  the local polar coordinates centered at  $c$ , then  $\Omega_1$  locally coincides with the cone  $\{(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \mid 0 < \rho, 0 < \theta < \alpha\}$ . Finally define  $e_1, e_2$  the two edges of  $\Sigma$  such that  $e_1$  coincides with  $\{(\rho, 0), 0 < \rho\}$ , while  $e_2$  coincides with the line  $\{(\rho \cos \alpha, \rho \sin \alpha), 0 < \rho\}$ . In the particular case of a disk  $\Omega$ , one considers the operator  $\mathbf{T}^{(2)}$  realizing T-coercivity [15], with  $\mathbf{R}$  such that  $\mathbf{R}v_1(\rho, \theta) = v_1(\rho, \frac{\alpha}{\alpha-2\pi}(\theta - 2\pi))$ ,  $\forall(\rho, \theta) \in \Omega_2$ . Respectively, it is proposed an operator

$$\mathbf{T}'^{(2)}v = \begin{cases} v_1 - 2\mathbf{R}'v_2 & \text{in } \Omega_1 \\ -v_2 & \text{in } \Omega_2 \end{cases}, \quad \text{with } \mathbf{R}'v_2(\rho, \theta) = v_2(\rho, \frac{\alpha - 2\pi}{\alpha}\theta + 2\pi), \quad \forall(\rho, \theta) \in \Omega_1.$$

Then one can prove well-posedness for problem (2.1) if and only if  $\kappa_\sigma \notin [-I_\alpha; -1/I_\alpha]$ . The goal of this section is to propose an alternative operator  $\mathbf{R}_{\text{new}}$  (resp.  $\mathbf{R}'_{\text{new}}$ ) such that  $\mathbf{T}^{(2)}$  with  $\mathbf{R}_{\text{new}}$  (resp.  $\mathbf{T}'^{(2)}$ )

with  $\mathbf{R}'_{\text{new}}$ ) enables well-posedness under the same conditions as above, and guarantees at the discrete level the condition  $\mathbf{T}^{(2)}(V^h) \subset V^h$  (resp.  $\mathbf{T}'^{(2)}(V^h) \subset V^h$ ). This alternative method consists in building *rotation-* and *symmetry-based operators*, and can be applied to other geometries than a disk. In fact the key idea is to consider a *pattern-based domain*  $\Omega$  (see figure 2.1).

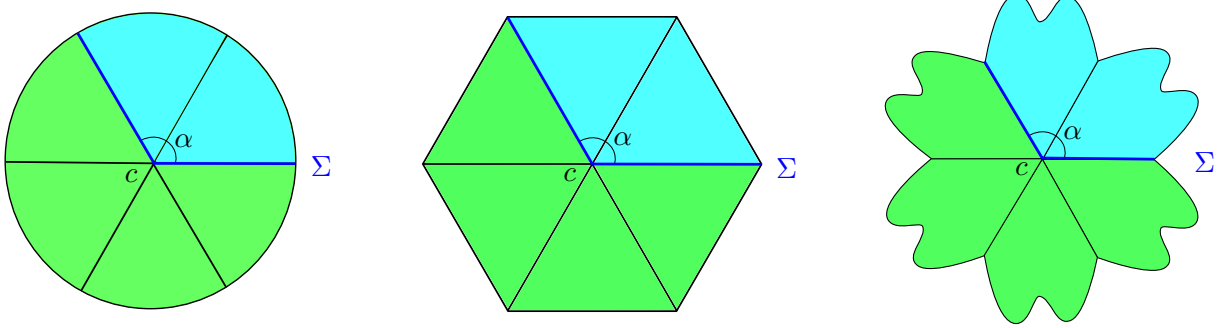


Figure 2.1: Examples of pattern-based geometries with a corner  $c$  of angle  $\alpha = 2\pi/3$  measured in  $\Omega_1$ : (left) sector-based, (middle) triangle-based, and (right) petal-based geometry.

Let us introduce some notations. Consider a pattern-based domain  $\Omega$  of pattern  $\mathcal{P}$  (sector, triangle, etc.). Introduce  $p, q > 0$  with  $p+q$  even such that  $\Omega_1$  is composed of  $p$  patterns, and  $\Omega_2$  is composed of  $q$  patterns (in figure 2.1, one can choose for instance  $p = 2$  and  $q = 4$ ). Then one rewrites  $\alpha := 2\pi \frac{p}{p+q}$  and due to the symmetry of the geometry it follows that

$$I_\alpha := \max\left(\frac{p}{q}, \frac{q}{p}\right). \quad (2.5)$$

In general one has to be careful in the presence of the two exterior corners  $c_1^{\text{ext}}, c_2^{\text{ext}}$ , that is the endpoints of  $\Sigma$  on the boundary  $\partial\Omega$ . Nonetheless, in the case where the angles at the corner  $c_1^{\text{ext}}$  (resp.  $c_2^{\text{ext}}$ ) are the same in  $\Omega_1$  and  $\Omega_2$  (as it is always the case here), (2.5) holds. If not, then the expression of  $I_\alpha$  is modified and it depends on the corners' angles at  $c_1^{\text{ext}}$  and  $c_2^{\text{ext}}$ . As the subject of the paper mainly concerns closed polygonal interfaces, we do not enter into further details (see [15]). Introduce also :

- $\Omega_1^k, k = 1, p$ , the  $k$ -th open pattern of  $\Omega_1$ , and  $\overline{\Omega_1} = \bigcup_{k=1}^p \overline{\Omega_1^k}$ . Respectively define  $\Omega_2^l, l = 1, q$ , the  $l$ -th open pattern of  $\Omega_2$ :  $\overline{\Omega_2} = \bigcup_{l=1}^q \overline{\Omega_2^l}$ . The numbering is chosen counterclockwise.
- $v_1^k := v|_{\Omega_1^k}, k = 1, p$  the restriction to  $\Omega_1^k$ . Similarly,  $v_2^l := v|_{\Omega_2^l}, l = 1, q$ .

To define  $\mathbf{R}_{\text{new}}$  as a rotation- and symmetry-based operator from  $V_1$  to  $V_2$ , one introduces  $\mathcal{S}^n$  the axial symmetry of axis  $e_n, n = 1, 2$  (the inverse of  $\mathcal{S}^n$  being itself), and  $\mathcal{R}_m$  the rotation of angle  $m\alpha/p, m = 1, p+q-1$  (the inverse of  $\mathcal{R}_m$  being  $\mathcal{R}_{-m}$  the rotation of angle  $-m\alpha/p$ ). More precisely these transforms are such that

- for  $(\rho, \theta) \in \Omega_1^k$ , for all  $k \in I_1 := \llbracket 1, \min(p, q) \rrbracket$ ,  $\mathcal{S}^1(\rho, \theta) \in \Omega_2^{q+1-k}$ ,
- for  $(\rho, \theta) \in \Omega_1^k$ , for all  $k \in I_2 := \llbracket p+1 - \min(p, q), p \rrbracket$ ,  $\mathcal{S}^2(\rho, \theta) \in \Omega_2^{p+1-k}$ ,
- for  $(\rho, \theta) \in \Omega_1^k$ , for all  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $\mathcal{R}_{p+l-k}(\rho, \theta) \in \Omega_2^l$ , for all  $l \in \llbracket 1, q \rrbracket$ .



Then one can define symmetry-based operators  $\mathbf{S}^n$  ( $n = 1, 2$ ) and rotation-based operators  $\mathbf{R}_m$  ( $m = 1, p + q - 1$ ) from  $V_1^k := \{v_1^k, v \in V\}$  to  $V_2^l := \{v_2^l, v \in V\}$  by:

- $\mathbf{S}^1 v_1^k(\rho, \theta) = v_1^k(\mathbf{S}^1(\rho, \theta))$  for  $(\rho, \theta) \in \Omega_2^{q+1-k}$ , for all  $k \in I_1$ ,
- $\mathbf{S}^2 v_1^k(\rho, \theta) = v_1^k(\mathbf{S}^2(\rho, \theta))$  for  $(\rho, \theta) \in \Omega_2^{p+1-k}$ , for all  $k \in I_2$ ,
- $\mathbf{R}_{k-(p+l)} v_1^k(\rho, \theta) = v_1^k(\mathbf{R}_{k-(p+l)}(\rho, \theta))$  for  $(\rho, \theta) \in \Omega_2^l$ , for all  $l = 1, q$ , for all  $k = 1, p$ .

Then one can define global operators  $\mathbf{R}$  from  $V_1$  to  $V_2$  composing these rotation-based and symmetry-based operators. To be an *admissible operator*,  $\mathbf{R}$  has also to ensure continuity at all interfaces between the patterns. Roughly speaking, the definition of an admissible operator is based on three steps (the general construction is given in the Appendix 2.A.1):

- 1) apply  $\mathbf{S}^1$  to  $v_1^k$  for some ad hoc  $k$ , for  $(\rho, \theta) \in \Omega_2^{q+1-k}$ ;
- 2) apply  $\mathbf{S}^2$  to  $v_1^k$  for some ad hoc  $k$ , for  $(\rho, \theta) \in \Omega_2^{p+1-k}$ ;
- 3) ensure continuity by alternating a rotation-based and a symmetry-based operator applied to the remaining  $(v_1^{k'})_{k' \in I}$ ,  $I$  being an appropriate subset of indices (see Appendix 2.A.1).

Let us give some examples. In the following we consider a triangle-based domain  $\Omega$ .

**First example** ( $\alpha < \pi$ ): consider for instance  $\alpha = 2\pi/3$ ,  $p = 2$  and  $q = 4$ . Then one can define two admissible operators  $\mathbf{R}$  (illustrated in figure 2.2):

$$\mathbf{R}v_1 = \begin{cases} \mathbf{S}^2 v_1^2 & \text{in } \Omega_2^1 \\ \mathbf{R}_{-2} v_1^2 & \text{in } \Omega_2^2 \\ \mathbf{S}^1 v_1^2 & \text{in } \Omega_2^3 \\ \mathbf{S}^1 v_1^1 & \text{in } \Omega_2^4 \end{cases}, \quad \text{or} \quad \mathbf{R}v_1 = \begin{cases} \mathbf{S}^2 v_1^2 & \text{in } \Omega_2^1 \\ \mathbf{S}^2 v_1^1 & \text{in } \Omega_2^2 \\ \mathbf{R}_{-4} v_1^1 & \text{in } \Omega_2^3 \\ \mathbf{S}^1 v_1^1 & \text{in } \Omega_2^4 \end{cases}.$$

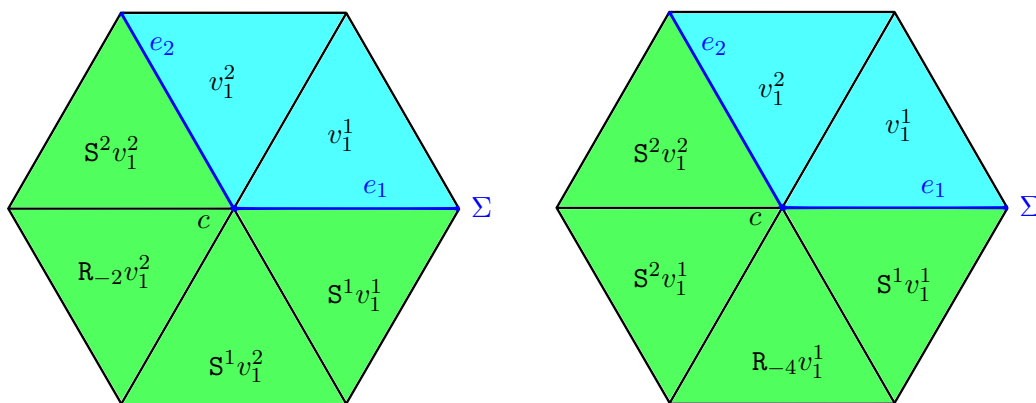
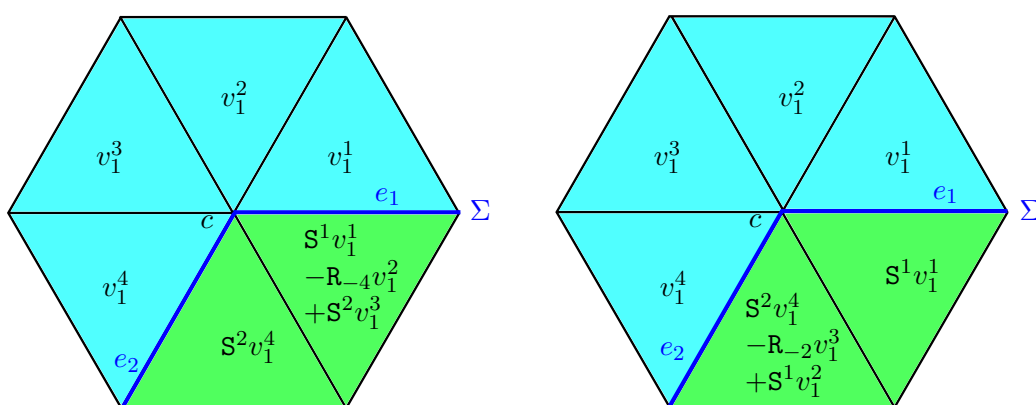
As several operators are admissible (in fact there are  $\min(p, q)$  admissible operators), one simply defines  $\mathbf{R}_{\text{new}}$  by averaging all admissible operators. In the example above, one obtains

$$\mathbf{R}_{\text{new}}v_1 = \begin{cases} \mathbf{S}^2 v_1^2 & \text{in } \Omega_2^1 \\ \frac{1}{2}(\mathbf{R}_{-2} v_1^2 + \mathbf{S}^2 v_1^1) & \text{in } \Omega_2^2 \\ \frac{1}{2}(\mathbf{S}^1 v_1^2 + \mathbf{R}_{-4} v_1^1) & \text{in } \Omega_2^3 \\ \mathbf{S}^1 v_1^1 & \text{in } \Omega_2^4 \end{cases}.$$

**Second example** ( $\alpha > \pi$ ): consider for instance  $\alpha = 4\pi/3$ ,  $p = 4$  and  $q = 2$  (one simply inverts the roles of  $p$  and  $q$  in the first example). In that case one "folds  $v_1$  up" such that  $\mathbf{R}_{\text{new}}v_1$  is defined over  $\Omega_2$ :

$$\mathbf{R}_{\text{new}}v_1 = \begin{cases} \frac{1}{2}(2\mathbf{S}^2 v_1^4 - \mathbf{R}_{-2} v_1^3 + \mathbf{S}^1 v_1^2) & \text{in } \Omega_2^1 \\ \frac{1}{2}(\mathbf{S}^1 v_1^1 - \mathbf{R}_{-4} v_1^2 + \mathbf{S}^2 v_1^3) & \text{in } \Omega_2^2 \end{cases},$$

which is the average of the two operators described in figure 2.3.


 Figure 2.2: Representation of the two admissible *geometry-based operators* for the first example.

 Figure 2.3: Representation of the two admissible geometry-based operators for the second example: (left) one applies an axial symmetry in  $\Omega_1^4$  and folds the rest of  $v_1$  into  $\Omega_2^2$  to ensure continuity, (right) one applies an axial symmetry in  $\Omega_1^1$  and folds the rest of  $v_1$  into  $\Omega_2^2$  to ensure continuity.

Remark that we can build the operator  $\mathbf{R}'_{\text{new}}$  with the same admissible operators (using the inverse of the rotation-based and symmetry-based operators), by simply inverting the roles of  $p$  and  $q$ . One can easily generalize this *tilings method* to any  $p, q > 0$  (see the Appendix 2.A.1 for details).

To realize T-coercivity under the same conditions as in [15], one finally has to check that these operators  $\mathbf{R}_{\text{new}}, \mathbf{R}'_{\text{new}}$  are optimal in the sense that  $\|\mathbf{R}_{\text{new}}\|^2 = \|\mathbf{R}'_{\text{new}}\|^2 = I_\alpha$ , with

$$\|\mathbf{R}_{\text{new}}\| = \sup_{w_1 \in V_1 \setminus \{0\}} \frac{\|\nabla \mathbf{R}_{\text{new}} w_1\|_{\Omega_2}}{\|\nabla w_1\|_{\Omega_1}}, \quad \text{and} \quad \|\mathbf{R}'_{\text{new}}\| = \sup_{w_2 \in V_2 \setminus \{0\}} \frac{\|\nabla \mathbf{R}'_{\text{new}} w_2\|_{\Omega_1}}{\|\nabla w_2\|_{\Omega_2}}.$$

From now on, we denote by  $\|\cdot\|_{\mathcal{O}}$  the  $L^2$ -norm over the open set  $\mathcal{O}$ .

Let us go back to our first example. One can prove that

$$\|\mathbf{R}_{\text{new}}\|^2 \leq \|M^\top M\|_2$$

with the matrix  $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , evaluated with the euclidean norm. Indeed, for  $w_1 \in V_1$ , define

$W \in \mathbb{R}^2$ ,  $W := (\|\nabla w_1^1\|_{\Omega_1^1}, \|\nabla w_1^2\|_{\Omega_1^2})^t$ , then  $MW = (\|\nabla w_1^2\|_{\Omega_1^2}, \frac{1}{2}(\|\nabla w_1^1\|_{\Omega_1^1} + \|\nabla w_1^2\|_{\Omega_1^2}), \frac{1}{2}(\|\nabla w_1^1\|_{\Omega_1^1} + \|\nabla w_1^2\|_{\Omega_1^2}), \|\nabla w_1^1\|_{\Omega_1^1})^t$ . Since  $\mathbf{S}^n$  and  $\mathbf{R}_{-m}$  ( $n = 1, 2$ ,  $m = 1, 5$ ) are isometry-based operators, one finds

$$\|\nabla \mathbf{R}_{\text{new}} w_1\|_{\Omega_2}^2 \leq (M^\top M W, W) \leq \|M^\top M\|_2 \|W\|_2^2.$$

One can operate similarly for the second example to find

$$\|\mathbf{R}_{\text{new}}\|^2 \leq \|M'^\top M'\|_2$$

with the matrix  $M' = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} = M^\top$ . Remark that it is normal to find that  $M' = M^\top$  as the role of  $p$  and  $q$  are exchanged, and one obtains the same results for  $\mathbf{R}'_{\text{new}}$ .

In these two examples  $I_\alpha = 2$ , and a straightforward computation shows that  $\|M^\top M\|_2 = \|M'^\top M'\|_2 = 2$ . The general expression of the matrix  $M$  is given in the Appendix 2.A.1 and propositions 2.1 and 2.2 there give us that for any  $p, q$ ,  $\max(\|\mathbf{R}_{\text{new}}\|^2, \|\mathbf{R}'_{\text{new}}\|^2) \leq I_\alpha$ .

Let us make some comments regarding this approach:

- one can work with any pattern shape. For numerical approximations using triangular elements, the (local) triangle-based domain is more suitable.
- this approach is optimal when the corner angle  $\alpha$  can be expressed as a rational fraction times  $2\pi$ , that is  $\alpha \in 2\pi\mathbb{Q}$ . Nonetheless, one can adapt the results for any real-valued corner angle (see the Appendix 2.A.1). In that case the method is *near-optimal*.
- at a discrete level, one meshes a single pattern, the other patterns being built by symmetry. Note that there is no need for additional symmetry requirements for the meshing of the pattern to ensure the continuity of the discrete operator  $\mathbf{T}_h^{(2)}$ .
- in the general case,  $\Omega$  is *locally pattern-based* in a neighborhood of any interior corner. Consequently this approach can be adapted using a localization process (see next section).

For pattern-based domains, one has automatically  $\mathbf{T}^{(2)}(V^h) \subset V^h$  (resp.  $\mathbf{T}'^{(2)}(V^h) \subset V^h$ ) with the help of the process described above and one derives classical errors estimates [40, Corollary 1].

Let us give some numerical results in the geometry of the second example. In that case  $\Omega^{\text{hex}}$  is a hexagon where  $\Omega_1^{\text{hex}}$  locally coincides with a cone of angle  $\alpha = 4\pi/3$ . In this case  $I_c = [-2; -1/2]$ . Let us construct an exact solution (of a problem of type (2.1) with  $\kappa_\sigma \notin I_c$ , see (2.6) below): consider  $u_r \in H^1(\Omega^{\text{hex}})$  such that in polar coordinates

$$u_r(\rho, \theta) = \begin{cases} \sigma_1^{-1} \rho^2 \sin(\frac{p+q}{2}(\theta-\alpha)) & \text{in } \Omega_1^{\text{hex}}, \\ \sigma_2^{-1} \rho^2 \sin(a_{pq}(\theta-\alpha)) & \text{in } \Omega_2^{\text{hex}}, \sigma_2^{-1} \rho^2 \sin(\frac{p+q}{2}(\theta-\alpha)) & \text{in } \Omega_2^{\text{hex}}, \end{cases}$$

where  $p$  (resp.  $q$ ) still denotes the number of patterns in  $\Omega_1^{\text{hex}}$  (resp.  $\Omega_2^{\text{hex}}$ ) and  $f := -\text{div}(\sigma \nabla u_r) = \frac{1}{4}((p+q)^2 - 16) \sin(\frac{p+q}{2}(\theta-\alpha)) \in L^2(\Omega^{\text{hex}})$  <sup>(1)</sup>. By construction,  $u_r$  is piecewise smooth [71]:  $u_r|_{\Omega_i^{\text{hex}}} \in H^{3-\varepsilon}(\Omega_i^{\text{hex}})$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $i = 1, 2$ . To illustrate the importance of T-conforming meshes around corners, let us add to  $u_r$  a singular part, that is some  $u_s(\rho, \theta) = \rho^\lambda \Phi(\theta)$ , with  $\lambda := \lambda(\sigma) \in \mathbb{R}$ , such that

1. With this choice  $u_r(\cdot, \theta) = 0$  for  $\theta \in \{n \frac{2\pi}{p+q}, n \in \mathbb{Z}\}$ , then continuity is easily ensured at the crossing of the interfaces.

$\operatorname{div}(\sigma \nabla u_s) = 0$  in  $\Omega^{\text{hex}}$ . For example we consider [24, 105]

$$\Phi(\theta) = \begin{cases} \frac{\cosh(\lambda(\theta - \alpha/2))}{\cosh(\lambda\alpha/2)} & 0 \leq \theta \leq \alpha/2 \\ \frac{\cosh(\lambda(\theta + (2\pi - \alpha)/2))}{\cosh(\lambda(2\pi - \alpha)/2)} & -(2\pi - \alpha)/2 \leq \theta \leq 0 \end{cases},$$

$$\Phi(\theta) = \Phi(2\pi - \theta - \alpha/2) \quad -\pi \leq \theta \leq -(2\pi - \alpha) \text{ or } \alpha/2 \leq \theta \leq \pi.$$

One chooses for  $\lambda$  the smallest positive real number. Its value depends on  $\kappa_\sigma$ , and one can prove that since  $\kappa_\sigma \notin I_c$ ,  $\lambda \neq 0$  [12], so  $u_s \in H^1(\Omega^{\text{hex}})$ , with  $u_s|_{\Omega_i^{\text{hex}}} \in H^{1+\lambda-\varepsilon}(\Omega_i^{\text{hex}})$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $i = 1, 2$ . Defining  $g := (u_r + u_s)|_{\partial\Omega^{\text{hex}}}$ , one checks that  $u = u_r + u_s$  is the unique solution of the problem

$$\begin{cases} \text{Find } u \in H^1(\Omega^{\text{hex}}) \text{ such that:} \\ -\operatorname{div}(\sigma \nabla u) = f \quad \text{in } \Omega^{\text{hex}} \\ u = g \quad \text{on } \partial\Omega^{\text{hex}} \end{cases}. \quad (2.6)$$

With the help of a lifting of the non-zero boundary condition, one easily checks that problem (2.6) set in this hexagonal domain is well-posed when  $\kappa_\sigma \notin I_c = [-I_\alpha; -1/I_\alpha]$ . We consider two kinds of meshes (see figure 2.4), namely standard meshes (without rotation- or symmetry-based invariance) and T-conforming meshes, and discretize the problem for several FE orders, for two chosen contrasts:  $\kappa_\sigma = -3$  and  $\kappa_\sigma = -2.1$  (see figure 2.5). For this geometry, computations give

$$\lambda = 0.5 \quad \text{when } \kappa_\sigma = -3; \quad \text{and} \quad \lambda = 0.2051664777 \quad \text{when } \kappa_\sigma = -2.1.$$

Classically the regularity of the solution  $u = u_r + u_s$  is driven by the singular behavior  $u_s$ . Namely one finds that  $u_i$ ,  $i = 1, 2$ , belongs to  $H^{1+\lambda-\varepsilon}(\Omega_i^{\text{hex}})$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ . Consequently one expects an order of convergence equal to  $\lambda$  for the relative errors in  $H_0^1$ -norm. With figure 2.5 one concludes that T-conforming meshes ensure optimal convergence speed while standard meshes are not stable with respect to the mesh size. Note that in figure 2.5 one does not improve the order of convergence using higher FE orders, due to the low regularity of the solution.

In a more general case of a polygonal interface with several interior corners, one has to apply locally this tilings method in the neighborhood of the corners. This strategy is explained in the next two sections.

## 2.4 Well-posedness

As seen in the introduction, the problem (2.1) set in the Hilbert space  $V = H_0^1(\Omega)$  can be expressed in variational form as (2.2). Let us introduce the (continuous linear) operator  $A$  from  $V$  to  $V'$  such that  $\langle Av, w \rangle = a(v, w)$  for all  $v, w \in V$ : by construction,  $A : v \mapsto -\operatorname{div}(\sigma \nabla v)$ . In operator form, (2.1)-(2.2) writes equivalently

$$\text{Find } u \in V \text{ such that } Au = f \text{ in } V'. \quad (2.7)$$

Classically [94, 31], we recall that  $A$  is a Fredholm operator when  $\dim(\ker(A)) < \infty$ , its range  $R(A)$  is closed and  $\operatorname{codim}(R(A)) < \infty$ ; in this case its index is equal to  $\dim(\ker(A)) - \operatorname{codim}(R(A))$ . If in addition the associated form  $a$  is hermitian, which is the case here, the index is automatically equal

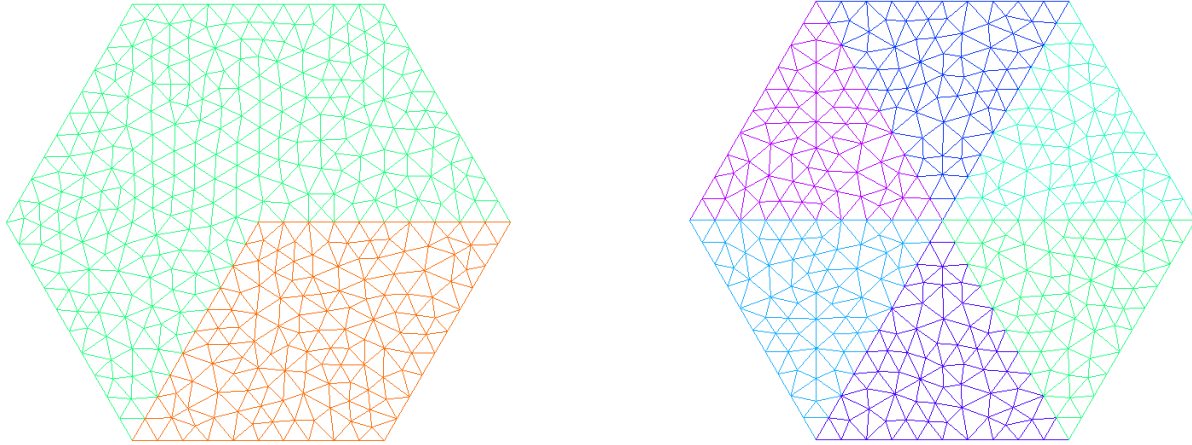


Figure 2.4: Left: standard mesh ( $h = 0.2$ ),  $\Omega_1^{\text{hex}}$  corresponds to green region while  $\Omega_2^{\text{hex}}$  corresponds to the orange one. Right: T-conforming mesh ( $h = 0.2$ ).

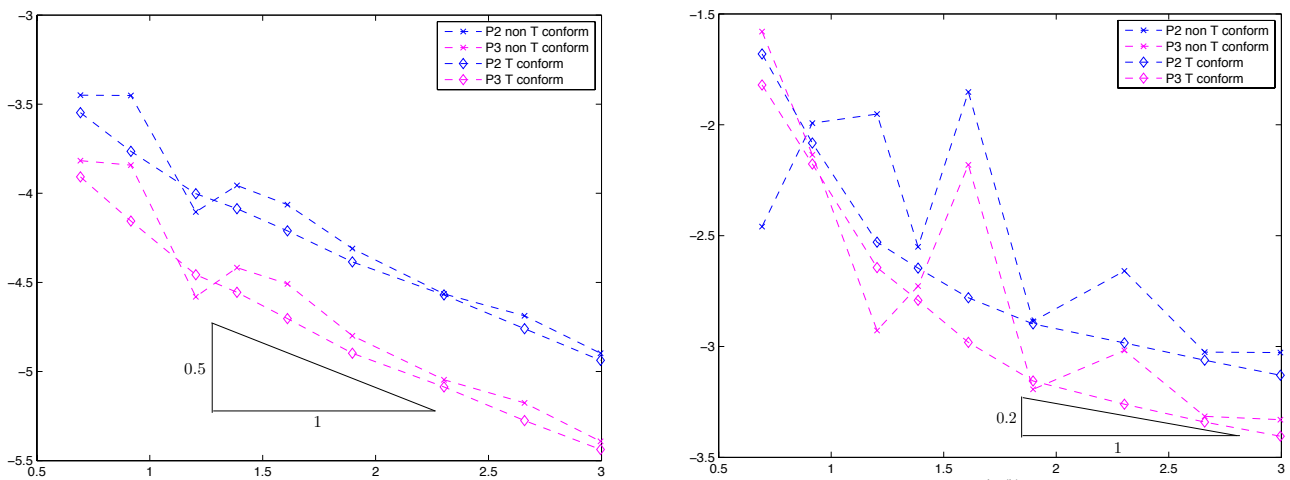


Figure 2.5: Left: relative error in  $H^1$  norm for different mesh sizes  $h$  (log-log scale) for  $\kappa_\sigma = -3$ . Right: relative error in  $H^1$  norm for different mesh sizes  $h$  (log-log scale) for  $\kappa_\sigma = -2.1$ .

to 0. When  $A$  is a Fredholm operator of index 0, we say that (2.7), or equivalently (2.1)-(2.2), are *well-posed in the Fredholm sense*. On the other hand, (2.1)-(2.2) is *well-posed* if, and only if, for all  $f \in V'$ , it has one and only one solution  $u$ , with continuous dependence: there exists  $C > 0$  such that, for all  $f \in V'$ , the solution  $u$  verifies  $\|u\|_V \leq C\|f\|_{V'}$ . In terms of operators, it means that  $A^{-1}$  is a well-defined operator from  $V'$  to  $V$ .

To solve the problem (2.1) we apply the theory of T-coercivity [22, 15, 40]. Within the Banach-Necas-Babuska framework, one assumes a *weak stability condition*, also called an inf-sup condition.

**Definition 2.1.** Let  $a(\cdot, \cdot)$  be a continuous sesquilinear form on  $V \times V$ . It verifies a weak stability condition if

$$\exists \mathbf{C} \text{ a compact operator, } \exists \alpha' > 0, \beta' \in \mathbb{R}, \forall v \in V, \sup_{w \in V \setminus \{0\}} \frac{|a(v, w)|}{\|w\|_V} \geq \alpha' \|v\|_V - \beta' \|\mathbf{C}v\|_V. \quad (2.8)$$

Let us now introduce an *a priori* intermediate condition (cf. [22]).

**Definition 2.2.** Let  $a(\cdot, \cdot)$  be a continuous sesquilinear form on  $V \times V$ . It is weakly  $\mathbf{T}$ -coercive if

$$\exists \mathbf{C} \text{ a compact operator, } \exists \mathbf{T} \text{ a bijective operator, } \exists \underline{\alpha} > 0, \underline{\beta} \in \mathbb{R}, \forall v \in V, |a(v, \mathbf{T}v)| \geq \underline{\alpha} \|v\|_V^2 - \underline{\beta} \|\mathbf{C}v\|_V^2. \quad (2.9)$$

In other words, the form  $a(\cdot, \mathbf{T}\cdot)$  fulfills a Gårding's inequality [120].

**Remark 2.1.** When  $\beta' \leq 0$  one obtains the classical stability condition. Respectively, when  $\underline{\beta} \leq 0$ , one obtains coercivity for  $a(\cdot, \mathbf{T}\cdot)$ .

The operator  $\mathbf{T}$  introduced in (2.9) realizes the inf-sup condition (2.8): it is sometimes called an inf-sup operator. Let us state a simple result (2).

**Theorem 2.1.** Let  $a(\cdot, \cdot)$  be a continuous, sesquilinear hermitian form on  $V \times V$ . Then the three assertions below are equivalent:

- (i) (2.1)-(2.2) is well-posed in the Fredholm sense;
- (ii) the form  $a$  satisfies a weak stability condition;
- (iii) the form  $a$  is weakly  $\mathbf{T}$ -coercive.

**Remark 2.2.** To study well-posed problems (with a hermitian form), it is enough to have  $\beta' = \underline{\beta} = 0$  above (the compact operator is no longer relevant), cf. [40].

We propose below some realizations of the inf-sup operator that can be used for problem (2.1) for a (closed) polygonal interface  $\Sigma$ . So from now on, it is a polygonal line without endpoints, ie. it is a loop. Let  $N$  denote the number of its corners, resp.  $(c_n)_{n=1,N}$  its corners and  $(\alpha_n)_{n=1,N}$  the corner angles measured in  $\Omega_1$ , resp.  $(e_n)_{n=1,N}$  its edges. We introduce the polar coordinates  $(\rho_n, \theta_n)$  centered at  $c_n$  such that  $\Omega_1$  coincides locally with the cone  $\{(\rho_n \cos \theta_n, \rho_n \sin \theta_n) \mid 0 < \rho_n, 0 < \theta_n < \alpha_n\}$ .

First, we build an ad hoc partition of unity on  $\bar{\Omega}$ . So, let  $(\chi_n)_{n=1,N} \in (C^\infty(\bar{\Omega}; [0, 1]))^N$  with disjoint supports, such that for all  $n = 1, N$ ,  $\chi_n(x) = \chi_n(\rho_n)$ , and furthermore  $\chi_n = 1$  for  $0 \leq \rho_n \leq \rho_{min,n}$  for some  $\rho_{min,n} > 0$ . Introducing next  $\psi \in C^\infty(\bar{\Omega}; [0, 1])$  equal to 1 in a neighborhood of the interface, we remark that  $\psi - \sum_{n=1,N} \chi_n$  is a (smooth) function that vanishes in a neighborhood of the corners, and also that "close" to the interface, it is a function which is symmetric with respect to the interface (3). So, "close" to the interface, we write as  $\sum_{n=1,N} \chi_{N+n}$ , where  $(\chi_{N+n})_{n=1,N} \in (C^\infty(\bar{\Omega}; [0, 1]))^N$  are on the one hand symmetric functions with respect to the interface, and on the other hand are such that for all  $n = 1, N$ ,  $\chi_{n+N}$  is equal to 0 on  $\Sigma \setminus e_n$ , with disjoint supports. Obviously, it holds  $\sum_{n=1,2N} \chi_n = 1$  on  $\Sigma$ . Last, we define  $\chi_0 = 1 - \sum_{n=1,2N} \chi_n$ , which vanishes in a neighborhood of the interface  $\Sigma$  and, setting  $P = 2N$ , we obtain that  $(\chi_p)_{p=0,P} \in (C^\infty(\bar{\Omega}; [0, 1]))^P$  is a partition of unity on  $\bar{\Omega}$ , with the properties on the supports  $S_p := \text{supp}(\chi_p)$  listed above.

Now, let  $(\mathbf{R}_p)_{p=1,P}$  be operators that act from  $V_1$  to  $V_2$ , and also from  $L^2(\Omega_1)$  to  $L^2(\Omega_2)$ . Similarly, let  $(\mathbf{R}'_p)_{p=1,P}$  be operators that act from  $V_2$  to  $V_1$ , and also from  $L^2(\Omega_2)$  to  $L^2(\Omega_1)$ . We introduce  $\|\mathbf{R}\| := \max_{p=1,P} \|\mathbf{R}_p\|$ ,  $\|\mathbf{R}'\| := \max_{p=1,P} \|\mathbf{R}'_p\|$ , resp.  $|\mathbf{R}| := \max_{p=1,P} |\mathbf{R}_p|$ ,  $|\mathbf{R}'| := \max_{p=1,P} |\mathbf{R}'_p|$ , where

2. The proof is given in section 2.B.2.

3. The strictly positive, upper limit distance up to which this property applies is a function of  $\min_n \rho_{min,n}$  and of  $(\alpha_n)_{n=1,N}$ .

for all  $p = 1, P$ ,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{R}_p\| &:= \sup_{w_1 \in V_1, \|\chi_p^{1/2} \nabla w_1\|_{\Omega_1 \cap S_p} = 1} \|\chi_p^{1/2} \nabla \mathbf{R}_p w_1\|_{\Omega_2 \cap S_p}, & \|\mathbf{R}_p\| &:= \sup_{w_1 \in L^2(\Omega_1), \|w_1\|_{\Omega_1} = 1} \|\mathbf{R}_p w_1\|_{\Omega_2}, \\ \|\mathbf{R}'_p\| &:= \sup_{w_2 \in V_2, \|\chi_p^{1/2} \nabla w_2\|_{\Omega_2 \cap S_p} = 1} \|\chi_p^{1/2} \nabla \mathbf{R}'_p w_2\|_{\Omega_1 \cap S_p}, & \|\mathbf{R}'_p\| &:= \sup_{w_2 \in L^2(\Omega_2), \|w_2\|_{\Omega_2} = 1} \|\mathbf{R}'_p w_2\|_{\Omega_1}. \end{aligned}$$

We assume that the global conditions  $\|\mathbf{R}\| \geq 1$  and  $\|\mathbf{R}'\| \geq 1$  hold. Finally, we assume matching conditions on the traces:

$$\forall p, \forall v_1 \in V_1, \mathbf{R}_p v_1|_{\Sigma \cap S_p} = v_1|_{\Sigma \cap S_p}, \quad \forall p, \forall v_2 \in V_2, \mathbf{R}'_p v_2|_{\Sigma \cap S_p} = v_2|_{\Sigma \cap S_p}. \quad (2.10)$$

**Remark 2.3.** *The conditions (2.10) and  $\|\mathbf{R}\| \geq 1$ ,  $\|\mathbf{R}'\| \geq 1$  are always fulfilled in practice, see the end of the section where the explicit construction of the operators is given.*

Finally we define the two operators

$$\mathbf{T}v = \begin{cases} v_1 & \text{on } \Omega_1 \\ -v_2 + 2 \sum_{p=1, P} \chi_p \mathbf{R}_p v_1 & \text{on } \Omega_2 \end{cases}, \quad \mathbf{T}'v = \begin{cases} v_1 - 2 \sum_{p=1, P} \chi_p \mathbf{R}'_p v_2 & \text{on } \Omega_1 \\ -v_2 & \text{on } \Omega_2 \end{cases}. \quad (2.11)$$

Now one can prove the following

**Theorem 2.2.** *If the contrast  $\kappa_\sigma$  does not belong to  $[-\|\mathbf{R}'\|^2; -1/\|\mathbf{R}\|^2]$ , then the problem (2.1) is well-posed in the Fredholm sense.*

*Proof.* We assume for instance that  $\kappa_\sigma \in (-1/\|\mathbf{R}\|^2; 0)$ . We shall apply theorem 2.1 and show that the form  $a$  is weakly T-coercive. We consider the operator  $\mathbf{T}$  defined in (2.11) to prove the condition (2.9). Due to the matching conditions (2.10) satisfied by  $(\mathbf{R}_p)_p$ ,  $\mathbf{T}$  is an operator of  $V$  and, in addition one checks easily that  $\mathbf{T} \circ \mathbf{T} = \mathbf{I}_V$  so  $\mathbf{T}$  is bijective. Then:

$$\begin{aligned} a(v, \mathbf{T}w) &= |\sigma_1|(\nabla v_1, \nabla w_1)_{\Omega_1} + |\sigma_2|(\nabla v_2, \nabla w_2)_{\Omega_2} - 2|\sigma_2| \sum_{p=1, P} (\nabla v_2, \nabla(\chi_p \mathbf{R}_p w_1))_{\Omega_2 \cap S_p} \\ &= b(v, w) + c(v, w), \text{ where the forms } b \text{ and } c \text{ are respectively defined by:} \\ b(v, w) &= |\sigma_1|(\nabla v_1, \nabla w_1)_{\Omega_1} + |\sigma_2|(\nabla v_2, \nabla w_2)_{\Omega_2} - 2|\sigma_2| \sum_{p=1, P} (\nabla v_2, \chi_p \nabla(\mathbf{R}_p w_1))_{\Omega_2 \cap S_p}, \\ c(v, w) &= -2|\sigma_2| \sum_{p=1, P} (\nabla v_2, \mathbf{R}_p w_1 \nabla \chi_p)_{\Omega_2 \cap S_p}. \end{aligned}$$

Using Young's inequality with  $\eta > 0$  on  $b(v, v)$ , we get

$$b(v, v) \geq |\sigma_1| \|\nabla v_1\|_{\Omega_1}^2 + |\sigma_2| \|\nabla v_2\|_{\Omega_2}^2 - |\sigma_2| \sum_{p=1, P} \left( \eta \|\chi_p^{1/2} \nabla v_2\|_{\Omega_2 \cap S_p}^2 + \eta^{-1} \|\chi_p^{1/2} \nabla(\mathbf{R}_p v_1)\|_{\Omega_2 \cap S_p}^2 \right).$$

Then we find a first lower bound

$$\begin{aligned} -|\sigma_2| \eta \sum_{p=1, P} \|\chi_p^{1/2} \nabla v_2\|_{\Omega_2 \cap S_p}^2 &\geq -|\sigma_2| \eta \sum_{p=1, P} \|\chi_p^{1/2} \nabla v_2\|_{\Omega_2}^2 \\ &= -|\sigma_2| \eta \sum_{p=1, P} (\chi_p \nabla v_2, \nabla v_2)_{\Omega_2} \\ &= -|\sigma_2| \eta ((1 - \chi_0) \nabla v_2, \nabla v_2)_{\Omega_2} \\ &\geq -|\sigma_2| \eta \|\nabla v_2\|_{\Omega_2}^2, \text{ as } \|1 - \chi_0\|_{L^\infty(\Omega_2)} = 1. \end{aligned}$$

Next, using the definitions of  $(\|\mathbf{R}_p\|)_{p=1,P}$  and  $\|\mathbf{R}\|$ , we find a second lower bound

$$\begin{aligned}
 -|\sigma_2| \eta^{-1} \sum_{p=1,P} \|\chi_p^{1/2} \nabla(\mathbf{R}_p v_1)\|_{\Omega_2 \cap S_p}^2 &\geq -|\sigma_2| \eta^{-1} \sum_{p=1,P} \|\mathbf{R}_p\|^2 \|\chi_p^{1/2} \nabla v_1\|_{\Omega_1 \cap S_p}^2 \\
 &\geq -|\sigma_2| \eta^{-1} \|\mathbf{R}\|^2 \sum_{p=1,P} \|\chi_p^{1/2} \nabla v_1\|_{\Omega_1}^2 \\
 &= -|\sigma_2| \eta^{-1} \|\mathbf{R}\|^2 ((1 - \chi_0) \nabla v_1, \nabla v_1)_{\Omega_1} \\
 &\geq -|\sigma_2| \eta^{-1} \|\mathbf{R}\|^2 \|\nabla v_1\|_{\Omega_1}^2, \text{ as } \|1 - \chi_0\|_{L^\infty(\Omega_1)} = 1.
 \end{aligned}$$

Hence,

$$b(v, v) \geq (|\sigma_1| - |\sigma_2| \eta^{-1} \|\mathbf{R}\|^2) \|\nabla v_1\|_{\Omega_1}^2 + |\sigma_2| (1 - \eta) \|\nabla v_2\|_{\Omega_2}^2.$$

Regarding  $c(v, v)$ , if we let  $G := \max_{p=1,P} (\|\chi_p\|_{W^{1,\infty}(\Omega_2)})$ , then by using Young's inequality with  $\eta' > 0$  we find a third lower bound

$$\begin{aligned}
 c(v, v) &\geq -|\sigma_2| \sum_{p=1,P} \left( \eta' \|\nabla v_2\|_{\Omega_2 \cap S_p}^2 + \eta'^{-1} \|\mathbf{R}_p v_1 \nabla \chi_p\|_{\Omega_2 \cap S_p}^2 \right) \\
 &\geq -|\sigma_2| P \eta' \|\nabla v_2\|_{\Omega_2}^2 - |\sigma_2| \eta'^{-1} G^2 \sum_{p=1,P} \|\mathbf{R}_p v_1\|_{\Omega_2 \cap S_p}^2 \\
 &\geq -|\sigma_2| P \eta' \|\nabla v_2\|_{\Omega_2}^2 - |\sigma_2| P \eta'^{-1} G^2 |\mathbf{R}|^2 \|v\|_{\Omega}^2.
 \end{aligned}$$

Introduce  $\mathbf{C} : V \rightarrow V$  such that  $(\mathbf{C}v, w)_V = (v, w)_\Omega$  for all  $v, w \in V$ . By Rellich's theorem  $\mathbf{C}$  is a compact operator, and using Young's inequality for  $\eta'' > 0$  we find

$$\|v\|_{\Omega}^2 \leq \|\mathbf{C}v\|_V \|v\|_V \leq \frac{1}{2} (\eta'')^{-1} \|\mathbf{C}v\|_V^2 + \frac{\eta''}{2} \|v\|_V^2.$$

Hence

$$c(v, v) \geq -|\sigma_2| P \eta' \|\nabla v_2\|_{\Omega_2}^2 - \frac{1}{2} \eta'' |\sigma_2| P \eta'^{-1} G^2 |\mathbf{R}|^2 \|v\|_V^2 - \frac{1}{2} (\eta'')^{-1} |\sigma_2| P \eta'^{-1} G^2 |\mathbf{R}|^2 \|\mathbf{C}v\|_V^2.$$

Define  $\alpha(\eta', \eta'') := \frac{1}{2} \eta'' |\sigma_2| P \eta'^{-1} G^2 |\mathbf{R}|^2$  and  $\beta(\eta', \eta'') := \frac{1}{2} (\eta'')^{-1} |\sigma_2| P \eta'^{-1} G^2 |\mathbf{R}|^2$ , finally we get the global lower bound below, for all  $\eta, \eta', \eta'' > 0$ ,

$$a(v, \mathbf{T}v) \geq (|\sigma_1| - |\sigma_2| \eta^{-1} \|\mathbf{R}\|^2) \|\nabla v_1\|_{\Omega_1}^2 + |\sigma_2| (1 - \eta - P \eta') \|\nabla v_2\|_{\Omega_2}^2 - \alpha(\eta', \eta'') \|\nabla v\|_{\Omega}^2 - \beta(\eta', \eta'') \|\mathbf{C}v\|_V^2.$$

We remark now that we can choose  $\eta, \eta' > 0$  such that

$$(|\sigma_1| - |\sigma_2| \eta^{-1} \|\mathbf{R}\|^2) > 0 \quad \text{and} \quad |\sigma_2| (1 - \eta - P \eta') > 0.$$

Indeed, the former condition is equivalent to  $\|\mathbf{R}\|^2 \kappa_\sigma < \eta$ . Because  $\kappa_\sigma \in (-1/\|\mathbf{R}\|^2; 0)$ , we can choose  $\eta < 1$  such that this condition is fulfilled. Then one chooses  $\eta' \in ]0, P^{-1}(1 - \eta)[$ , so the latter condition holds too. With these choices for  $\eta, \eta'$  (4), we can choose  $\eta''$  to obtain

$$(|\sigma_1| - |\sigma_2| \eta^{-1} \|\mathbf{R}\|^2) - \alpha(\eta', \eta'') > 0 \quad \text{and} \quad |\sigma_2| (1 - \eta - P \eta') - \alpha(\eta', \eta'') > 0.$$

Then we set

$$\underline{\alpha} := \min \left( (|\sigma_1| - |\sigma_2| \eta^{-1} \|\mathbf{R}\|^2), |\sigma_2| (1 - \eta - P \eta') \right) - \alpha(\eta', \eta'') > 0 \quad \text{and} \quad \underline{\beta} := \beta(\eta', \eta'').$$

---

4. Note that for given  $\eta'$ ,  $\lim_{\eta'' \rightarrow 0} \alpha(\eta', \eta'') = 0$ .



So, we have proved that

$$\exists \underline{\alpha} > 0, \underline{\beta} \in \mathbb{R}, \quad \forall v \in V, \quad a(v, \mathbf{T}v) \geq \underline{\alpha} \|v\|_V^2 - \underline{\beta} \|\mathbf{C}v\|_V^2,$$

which is the desired condition (2.9).

On the other hand, if  $\kappa_\sigma \in (-\infty; -\|\mathbf{R}'\|^2)$ , one can reverse the roles of  $\Omega_1$  and  $\Omega_2$  by using this time the operator  $\mathbf{T}'$  defined in (2.11). The proof then proceeds as above to prove that there exist  $\underline{\alpha}' > 0$ ,  $\underline{\beta}'$  such that

$$\forall v \in V, \quad a(v, \mathbf{T}'v) \geq \underline{\alpha}' \|v\|_V^2 - \underline{\beta}' \|\mathbf{C}v\|_V^2,$$

This is the condition (2.9). □

To conclude the study of the well-posedness of problem (2.1), we compute the bounds  $(\|\mathbf{R}_p\|)_{p=1,P}$ , resp.  $(\|\mathbf{R}'_p\|)_{p=1,P}$ . In the case where  $\Sigma$  is a polygonal line with all angles  $\alpha_n \in 2\pi\mathbb{Q}$ ,  $n = 1, N$ , one can explicit these bounds using the results of §2.3. To do so, let us define some neighborhoods of the interface,  $(B_p)_p$ , such that for all  $n = 1, N$ ,  $(B_n)$  is a triangle-based neighborhood of  $c_n$ , and  $(B_{N+n})$  is a neighborhood of  $e_n$  which is symmetric with respect to  $e_n$  (see figure 2.6). More precisely, for all  $n = 1, N$ ,  $B_n$  is composed of  $p_n > 0$  triangles in  $\Omega_1$  and  $q_n > 0$  triangles in  $\Omega_2$ . Finally for  $n = 1, N$ ,  $B_n$  is simply a cyclic polygon centered at  $c_n$ : define  $\rho_{c_n}$  the radius and  $s_n$  the side length of this polygon. Then for all  $n = 1, N$  one defines  $B_{N+n}$  as a trapezoid-based open set with one trapezoid in  $\Omega_1$  and one in  $\Omega_2$ , each trapezoid being of side lengths  $s_n$  and  $s_{n+1}$  (<sup>5</sup>). For technical purposes one chooses  $p_n \geq 2$  so that all  $B_{N+n}$ ,  $n = 1, N$  are disjoint open sets. Then one defines  $(\mathbf{R}_p)_p$  from  $V_1$  to  $V_2$  (and from  $L^2(\Omega_1)$  to  $L^2(\Omega_2)$ ) such that for all  $w_1 \in V_1$  and for all  $n = 1, N$

$$\mathbf{R}_n w_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \notin B_n \\ \mathbf{R}_{\text{new}}^n w_1(x) & \text{if } x \in B_n \end{cases}, \quad (2.12)$$

with  $\mathbf{R}_{\text{new}}^n$  defined with the tilings method as in §2.3 (the general expression is given in Appendix 2.A.1), and

$$\mathbf{R}_{N+n} w_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \notin B_{N+n} \\ w_1(x_\Sigma, -y_\Sigma) & \text{if } x \in B_{N+n} \end{cases}, \quad (2.13)$$

where  $(x_\Sigma, y_\Sigma)$  denotes the local cartesian coordinates, and the first axis coincides with  $\Sigma$ .

Finally, one chooses  $S_p$  the support of  $\chi_p$  such that  $S_p \subset B_p$  for the corner case ( $p = 1, N$ ) (<sup>6</sup>) and in the edge case  $S_p \subset \overline{B_p} \cup \overline{B_{p-N}} \cup \overline{B_{p+1-N}}$  ( $p = N+1, P-1$ ), resp.  $S_p \subset \overline{B_p} \cup \overline{B_{p-1}} \cup \overline{B_1}$ . One can check that (2.10) is satisfied for all  $\mathbf{R}_p$ ,  $p = 1, P$ . With these operators and using propositions 2.3 and 2.4 (cf. Appendix 2.A.1), one finds that  $\min(\|\mathbf{R}\|^2, \|\mathbf{R}'\|^2) \geq 1$  and  $\max(\|\mathbf{R}\|^2, \|\mathbf{R}'\|^2) \leq I_\alpha$ . We can finally state the result on the well-posedness of problem (2.1).

5.  $B_{2N}$  is composed of two trapezoids of side lengths  $s_{2N}$  and  $s_1$ .

6. In accordance with the previous notations, one chooses  $\rho_{\min,p}$  such that  $\rho_{\min,p} < \rho_{c_p}$ .

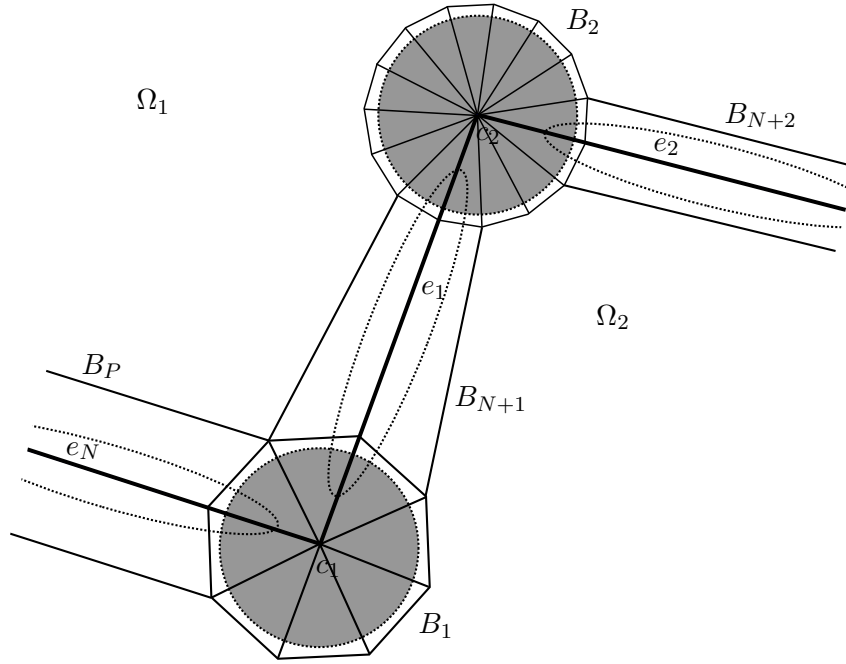


Figure 2.6: Notations around two corners  $c_1$  and  $c_2$ : here  $p_1 = 2$ ,  $q_1 = 6$ ,  $p_2 = 11$  and  $q_2 = 3$ . The gray zones represent the support of  $\chi_n$  while the empty-dashed domains represent the support of  $\chi_{N+n}$ ,  $n = 1, N$ .

**Corollary 2.1.** *Assume that all the corners' angles of the interface belong to  $2\pi\mathbb{Q}$ . If  $\kappa_\sigma \notin [-I_\alpha; -1/I_\alpha]$ , then the problem (2.1) is well-posed in the Fredholm sense.*

Note that if  $\kappa_\sigma \in [-I_\alpha; -1/I_\alpha]$ , then the problem (2.1) is not well-posed in the Fredholm sense, according to section 6 of [15]. Hence, we conclude that the condition on the contrast  $\kappa_\sigma \notin [-I_\alpha; -1/I_\alpha]$  is optimal for a 2D geometry with a polygonal interface separating to two subdomains.

## 2.5 Approximation by conforming discretizations

We study the approximation of problem (2.1) when the contrast  $\kappa_\sigma$  does not belong to the critical interval  $[-I_\alpha; -1/I_\alpha]$ . According to the previous section (see corollary 2.1), it follows that problem (2.1) is well-posed in the Fredholm sense. We impose further that it is well-posed, to ensure the uniqueness of the solution  $u$  to be approximated. We make this assumption from now on. We study the family of discrete problems (2.3), focusing on conforming <sup>(7)</sup> finite element approximations. Our aim is to prove that they can be solved in geometries with interfaces that include corners, with convergence of  $(u^h)_h$  towards the exact solution  $u$ . In other words, we prove optimality of the approximation.

We assume throughout §2.5 that  $\kappa_\sigma \in (-1/I_\alpha; 0)$  so that we can use the operator  $T$  as defined in (2.11).

The conforming approximations in  $V$  are defined on meshes that match with the interface (all elements are either subsets of  $\Omega_1$  or  $\Omega_2$ ), with piecewise polynomial approximations. Let us consider

7. A Discontinuous Galerkin approach has recently been studied in [43].

$(\mathcal{T}_h)_h$  a regular family of meshes of  $\overline{\Omega}$ , made of triangles; for all triangles  $\tau$ , one has either  $\tau \subset \overline{\Omega}_1$  or  $\tau \subset \overline{\Omega}_2$ . Define the family of Lagrange FE spaces (for a degree of approximation  $d \geq 1$ )

$$V_{(d)}^h := \{v \in V : v|_\tau \in \mathbb{P}_d(\tau), \forall \tau \in \mathcal{T}_h\},$$

where  $\mathbb{P}_d(\tau)$  is the space of polynomials of degree at most  $d$  on the triangle  $\tau$ . Unless otherwise specified, the index  $(d)$  is omitted. The parameter, or meshsize,  $h$  is defined as  $h := \max_{\tau \in \mathcal{T}_h} h_\tau$ , where  $h_\tau$  is the diameter of  $\tau$ . We recall that  $V_1^h$  (resp.  $V_2^h$ ) denotes the FE subspace of  $V_1$  (resp.  $V_2$ ) built on the triangulation  $\mathcal{T}_h$ .

Throughout this section,  $C$  is used to denote a generic positive constant which is independent of the meshsize, the triangulation, and the data/unknown of interest. We also use the shorthand notation  $A \lesssim B$  for the inequality  $A \leq CB$ , where  $A$  and  $B$  are two scalar quantities, and  $C$  is a generic constant. For instance,  $h \lesssim 1$  means " $h$  small enough".

Taking into account the previous remarks, we define, for  $v^h \in V^h$ ,

$$\mathbf{T}_h v^h = \begin{cases} v_1^h & \text{in } \Omega_1 \\ -v_2^h + 2I_h(\sum_{p=1,P} \chi_{p,h} \mathbf{R}_p v_1^h) & \text{in } \Omega_2 \end{cases},$$

with  $I_h$  the interpolation operator on  $V_{(d)}^h$ , and  $\chi_{p,h}$  the interpolation of  $\chi_p$  for all  $p = 1, P$ . Our goal is to prove optimality of the approximation, using the discrete operators  $(\mathbf{T}_h)_h$ . Let us first compare the discrete operator  $\mathbf{T}_h$  to the generalized operator  $\mathbf{T}_h^{(3)}$ , that is (2.4) with an additional summation  $\sum_{p=1,P}$  to fit with the definition of  $\mathbf{T}$  in (2.11):

$$\mathbf{T}_h^{(3)} v^h = \begin{cases} v_1^h & \text{in } \Omega_1 \\ -v_2^h + 2 \sum_{p=1,P} \chi_{p,h} \mathbf{R}_p v_1^h & \text{in } \Omega_2 \end{cases}. \quad (2.14)$$

As previously noticed, for all  $p = 1, P$ , the degree of  $\chi_{p,h} \mathbf{R}_p v_1^h$  (restricted to a triangle) is too high. For instance, if one is dealing with Lagrange FE of degree 1 ( $d = 1$ ), its degree is 2: hence,  $\mathbf{T}_h^{(3)} v^h$  does not belong to  $V^h$  in general. This is why we introduce the discrete operator  $\mathbf{T}_h$  with interpolation instead. However, we emphasize that the analysis presented in [40] remains valid if one replaces (the generalization of)  $\mathbf{T}_h^{(3)}$  by  $\mathbf{T}_h$ , as we explain below. Our aim is to prove that the form  $a$  is *uniformly weakly T-coercive*, namely

$$\exists \underline{\alpha}' > 0, \underline{\beta} \in \mathbb{R}, \forall h \lesssim 1, \forall v^h \in V^h, |a(v^h, \mathbf{T}_h v^h)| \geq \underline{\alpha}' \|v^h\|_V^2 - \underline{\beta} \|\mathbf{C}v^h\|_V^2, \quad (2.15)$$

and then one can follow the last part of the proof of Proposition 3 in [40] to derive a uniform discrete inf-sup condition (by contradiction). Classically, this yields an error estimate.

In order to obtain (2.15), we shall evaluate  $|a(v^h, (\mathbf{T} - \mathbf{T}_h)v^h)|$  for all  $v^h \in V^h$ .

**Definition 2.3.** Given  $h$ , let  $\mathcal{T}_{h,i}^p := \{\tau \in \mathcal{T}_h : \tau \cap \text{int}(S_p) \cap \Omega_i \neq \emptyset\}$ , for  $i = 1, 2$  and  $p = 1, P$ . The meshes  $(\mathcal{T}_h)_h$  are locally T-conform if, for all  $h \lesssim 1$ , for all  $p = 1, P$ , for all  $\tau \in \mathcal{T}_{h,2}^p$  the pre-image of  $\tau$  by  $\mathbf{R}_p$  belongs to  $\mathcal{T}_{h,1}^p$ .

Note that if the conditions of the above definition are met then for all  $v^h \in V^h$ , it holds that  $\mathbf{R}_p v_1^h$  is equal to the restriction of some element of  $V_2^h$  on  $\Omega_2 \cap S_p$ . We set  $\Omega_2^h := \text{int}(\bigcup_{p=1,P} \bigcup_{\tau \in \mathcal{T}_{h,2}^p} \tau)$ .

When the meshes are locally T-conform, the evaluation of  $|a(v^h, (\mathbf{T} - \mathbf{T}_h)v^h)|$  rests on two simple results.

**Lemma 2.1.** For all  $p = 1, P$  and for all  $w_2^h \in V_2^h$ ,

$$\|\nabla(\chi_{p,h}w_2^h - I_h(\chi_{p,h}w_2^h))\|_{\Omega_2^h} \lesssim h \|\chi_p\|_{W^{1,\infty}(\Omega_2)} \|\nabla w_2^h\|_{\Omega_2}.$$

*Proof.* We evaluate the  $L^2$ -norm of  $\nabla(\chi_{p,h}w_2^h - I_h(\chi_{p,h}w_2^h))$  on  $\Omega_2^h$  by splitting  $\Omega_2^h$  into triangles, and then going back to the reference triangle to obtain a uniform estimate (see proposition 2.5):

$$\|\nabla(\chi_{p,h}w_2^h - I_h(\chi_{p,h}w_2^h))\|_{\Omega_2^h}^2 = \sum_{\tau \subset \Omega_2^h} \int_{\tau} |\nabla(\chi_{p,h}|_{\tau}w_2^h|_{\tau} - I_{\tau}(\chi_{p,h}|_{\tau}w_2^h|_{\tau}))|^2 \lesssim \sum_{\tau \subset \Omega_2^h} h_{\tau}^2 |\chi_{p,h}|_{\tau}|_{W^{1,\infty}(\tau)}^2 \|\nabla w_2^h|_{\tau}\|_{\tau}^2.$$

Using the definition of the meshsize  $h$  yields

$$\|\nabla(\chi_{p,h}w_2^h - I_h(\chi_{p,h}w_2^h))\|_{\Omega_2^h} \lesssim h \left( \sup_{\tau \subset \Omega_2^h} |\chi_{p,h}|_{\tau}|_{W^{1,\infty}(\tau)} \right) \left( \sum_{\tau \subset \Omega_2^h} \|\nabla w_2^h|_{\tau}\|_{\tau}^2 \right)^{1/2} \lesssim h \|\chi_{p,h}\|_{W^{1,\infty}(\Omega_2)} \|\nabla w_2^h\|_{\Omega_2}.$$

Thanks to Corollary 1.109 of [61], it holds  $\|\chi_{p,h}\|_{W^{1,\infty}(\Omega_2)} \lesssim \|\chi_p\|_{W^{1,\infty}(\Omega_2)}$  for all  $p = 1, P$  and  $h \lesssim 1$ , which concludes the proof.  $\square$

**Lemma 2.2.** Assume that the meshes are locally  $\mathbf{T}$ -conform then there holds

$$\forall h \lesssim 1, \forall v^h \in V^h, \|(\mathbf{T} - \mathbf{T}^h)v^h\|_V \lesssim h \|v^h\|_V. \quad (2.16)$$

*Proof.* Given  $v^h \in V^h$ , let us apply the triangle inequality:

$$\|(\mathbf{T} - \mathbf{T}_h)v^h\|_V \leq \|(\mathbf{T} - \mathbf{T}_h^{(3)})v^h\|_V + \|(\mathbf{T}_h^{(3)} - \mathbf{T}_h)v^h\|_V.$$

Using the continuity of  $(\mathbf{R}_p)_{p=1,P}$ , one has for the first term of the right-hand side:

$$\|(\mathbf{T} - \mathbf{T}_h^{(3)})v^h\|_V \lesssim \sum_{p=1,P} \|\chi_p - \chi_{p,h}\|_{W^{1,\infty}(\Omega_2)} \|v^h\|_V \lesssim h \|v^h\|_V.$$

The last inequality is obtained thanks again to Corollary 1.109 of [61], which states that, for all  $p = 1, P$ ,  $\|\chi_p - \chi_{p,h}\|_{W^{1,\infty}(\Omega_2)} \leq C h |\chi_p|_{W^{2,\infty}(\Omega_2)}$  for some constant  $C > 0$  independent of  $h$ .

On the other hand, for the last term of the right-hand side, setting  $w_{p,2}^h = \mathbf{R}_p v_1^h$ ,  $p = 1, P$ , one finds

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{T}_h^{(3)} - \mathbf{T}_h)v^h\|_V &= 2|\sigma_2| \left\| \sum_{p=1,P} \nabla \left( \chi_{p,h}w_{p,2}^h - I_h(\chi_{p,h}w_{p,2}^h) \right) \right\|_{\Omega_2^h} \\ &\leq 2|\sigma_2| \sum_{p=1,P} \|\nabla(\chi_{p,h}w_{p,2}^h - I_h(\chi_{p,h}w_{p,2}^h))\|_{\Omega_2^h}. \end{aligned}$$

Hence using lemma 2.1 and finally the continuity of the operators  $(\mathbf{R}_p)_{p=1,P}$ , one has

$$\forall h \lesssim 1, \|(\mathbf{T}_h^{(3)} - \mathbf{T}_h)v^h\|_V \lesssim h \|v^h\|_V,$$

which ends the proof.  $\square$

As a consequence of (2.16), one has the by-product

$$\exists C_0 > 0, \forall h \lesssim 1, \forall v^h \in V^h, |a(v^h, \mathbf{T}v^h) - a(v^h, \mathbf{T}_h v^h)| \leq C_0 h \|v^h\|_V^2.$$

It now follows that

$$\exists \underline{\alpha} > 0, \underline{\beta} \in \mathbb{R}, \forall h \lesssim 1, \forall v^h \in V^h, |a(v^h, \mathbf{T}_h v^h)| \geq (\underline{\alpha} - C_0 h) \|v^h\|_V^2 - \underline{\beta} \|\mathbf{C}v^h\|_V^2,$$

with  $\underline{\alpha}$  and  $\underline{\beta}$  constants that express the weak  $\mathbf{T}$ -coercivity of  $a$  with the operator  $\mathbf{T}$  as in (2.11), see theorem 2.2 and its corollary 2.1. Hence, one finds the desired result (2.15), which in turns yields the error estimate (cf. [40]) since  $\mathbf{C}$  is a compact operator.

**Theorem 2.3.** *Assume that problem (2.1) is well-posed and that the meshes are locally T-conform. Then for  $h \lesssim 1$  there exists one and only one solution  $u^h$  to (2.3), with the estimate*

$$\|u - u^h\|_V \lesssim \inf_{v^h \in V^h} \|u - v^h\|_V.$$

We conclude that we have optimality of the approximation for problem (2.1), thanks to the choice of the discrete T-coercivity operator as in (2.14), assuming only that the meshes are locally T-conform. In particular, this result holds for a 2D geometry with a polygonal interface and corner angles in  $2\pi\mathbb{Q}$ .

## 2.6 Numerical experiments

We are now in position to present some numerical illustrations of problem (2.1). Consider the case of a squared cavity with a triangular inclusion. Define the square  $\Omega := (-4; 4) \times (-4; 4)$ :  $\Omega_2$  is an equilateral triangle of height 4 (the center of gravity  $G$  of  $\Omega_2$  is located at  $(x_1, x_2) = (0, -1/3)$ ) and  $\Omega_1 = \Omega \setminus \overline{\Omega_2}$ . We want to approximate problem (2.1) set in  $\Omega$  with a constant right-hand side  $f$ :

$$\begin{cases} \text{Find } u \in H_0^1(\Omega) \text{ such that:} \\ -\operatorname{div}(\sigma \nabla u) = 1 \quad \text{in } \Omega \end{cases}.$$

Denoting  $(c_n)_{n=1,3}$  the corners of  $\Sigma$ , then  $\Omega_1$  locally coincides near  $c_n$ ,  $n = 1, 3$  with the cone of aperture  $\alpha := 5\pi/3$ . For this configuration one finds  $I_\alpha := 5$ , and with corollary 2.1 one can prove that if  $\kappa_\sigma \notin [-5; -1/5]$  then problem (2.1) (with the data  $f = 1$ ) is well-posed in the Fredholm sense. Indeed, proceeding as in section 2.4, one defines first a neighborhood of the interface  $\Sigma$  made of three triangle-based neighborhoods (one for each corner) and three trapezoid-based neighborhoods (one for each edge). Then we define the cut-off functions  $(\chi_p)_{p=1,6}$  with well-chosen support as explained at the end of section 2.4. Finally one applies the ad hoc symmetry-based (and rotation-based) operator (2.12)-(2.13). The associated T-conforming mesh is represented in figure 2.7 (right): in this configuration we chose  $p_1 = p_2 = p_3 = 10$  and  $q_1 = q_2 = q_3 = 2$ .

In figure 2.8 are represented the relative errors in  $L^2$ -norm for several standard meshes (figure 2.7 (left)) and several T-conforming meshes (figure 2.7 (right)), for a contrast  $\kappa_\sigma = -5.2$ , and for several orders of approximation ( $d = 1, 2, 3$ ). Note that we do not compare the discrete solution with the exact solution. As the optimality of the approximation (see theorem 2.3) with T-conforming meshes is satisfied, one can compare with the discrete solution obtained on the finest mesh and one can check in figure 2.8 that convergence is ensured with a monotonic behavior of the error. On the other hand, with standard meshes the simulation gives unsatisfying results with a slightly erratic behavior of the error. Numerical results illustrate the importance of using T-conforming meshes to guarantee convergence of the numerical method.

Due to the symmetry of the geometry (and the right-hand side), one is expecting a symmetric solution with respect to  $Ox_2$ . One can check that, even for a refined, but standard mesh, the discrete solution does not satisfy this symmetry principle (see figure 2.9). This also explains why the approximation considering standard meshing does not converge so well.

Let us make some remarks regarding the convergence's orders. First let us mention that problem (2.1) with  $f = 1$  might have a non trivial kernel as we only proved Fredholmness. Nonetheless numerical computations did not present non trivial solutions of the homogeneous problem. With [40, Proposition 2] the regularity of the solution  $u$  of problem (2.1) is such that, away from the corners,  $u_i$ ,  $i = 1, 2$  is piecewise- $H^2$  whereas near the corner there exists  $s \in (0, 1]$  the that  $u_i$  is piecewise- $H^{1+s}$ . Then one has the estimates

$$\|u - u_h\|_V \lesssim h^s, \quad \text{and} \quad \|u - u_h\|_\Omega \lesssim h^{2s}.$$

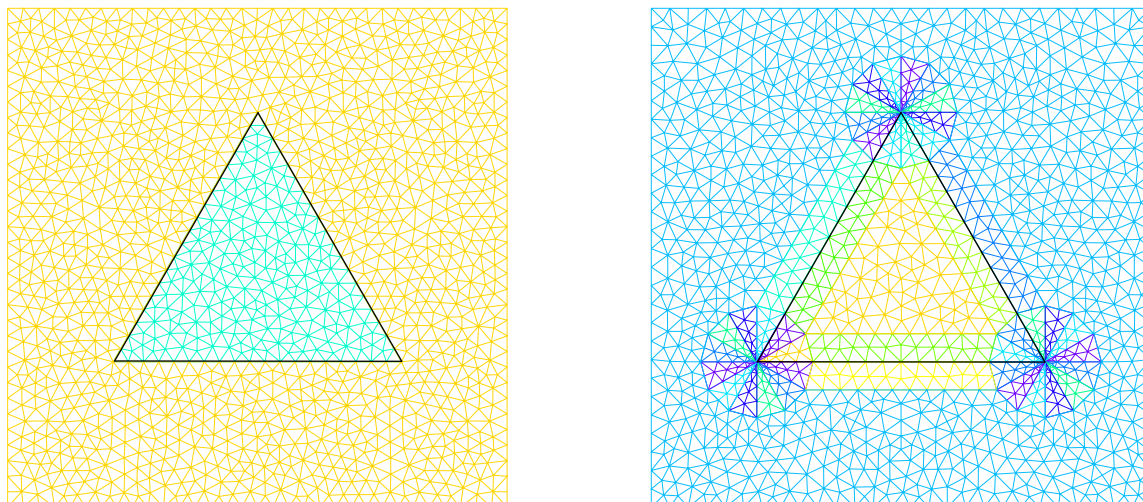


Figure 2.7: Left: example a standard triangulation of  $\Omega_h$  (1430 nodes). Right: example of T-conforming mesh (1424 nodes).

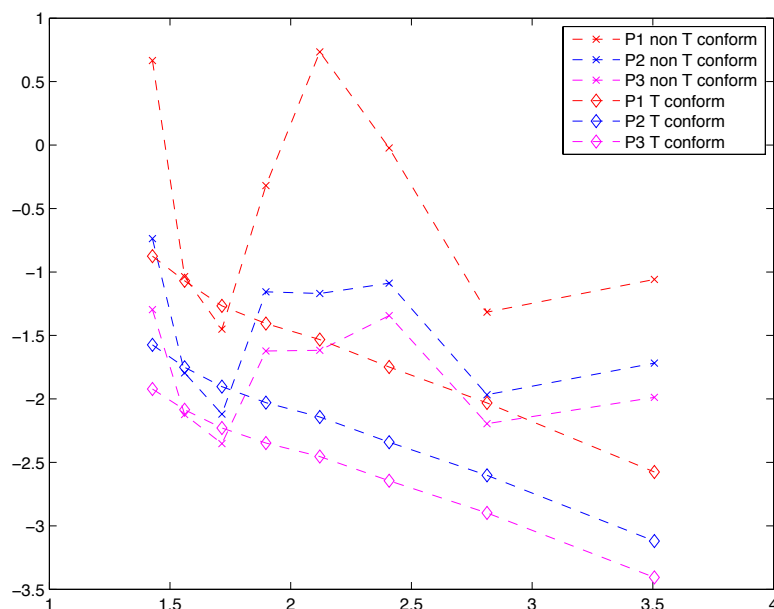


Figure 2.8: Relative error in  $L^2$ -norm for different mesh sizes  $h$  (log-log scale) for  $\kappa_\sigma = -5.2$ .

The last estimate is obtained with the so-called Aubin-Nitsche lemma [61]. The results of figure 2.8 show a convergence's order of 0.7 (that is  $s = 0.35$ ).

## 2.7 Concluding remarks

In this paper we extended the approximation theory for transmission problems with sign-changing coefficients with the T-coercivity approach. The novelty lies in the treatment of polygonal interfaces. This construction can be directly applied to the discrete problem, which allows one to guarantee

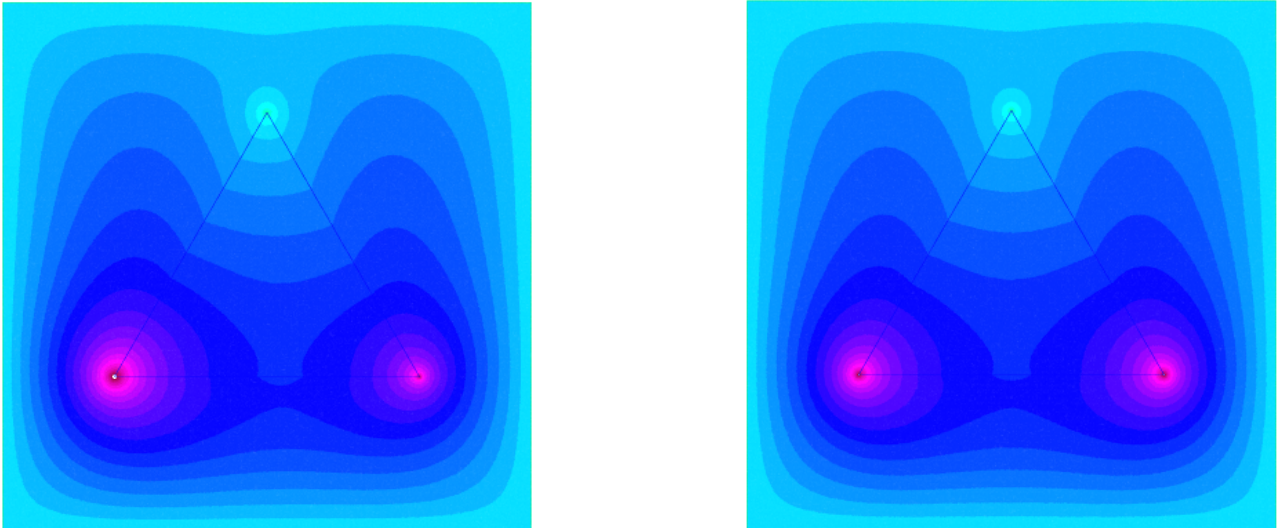


Figure 2.9: Left: solution  $u_h$  obtained with P3 finite elements on the finer standard mesh (101576 nodes). Right: solution  $u_h$  obtained with P3 finite elements on the finer T-conforming mesh (101716 nodes).

convergence of conforming finite element methods as soon as the continuous problem is well-posed in the Fredholm sense. Below, we list some possible extensions of our work.

- One can study the transmission problem for the electromagnetic field in the time-harmonic regime:

$$\begin{cases} \text{Find } u \in H_0^1(\Omega) \text{ such that:} \\ \text{div}(\sigma \nabla u) + \omega^2 \varsigma u = f \text{ in } \Omega \end{cases}, \quad (2.17)$$

at the frequency  $\omega \neq 0$ , with  $\varsigma > 0$  for a classical dielectric material or a metal, and  $\varsigma < 0$  for a metamaterial. Indeed, the added term  $\omega^2 \varsigma u$  is a compact perturbation, so one concludes that when  $\kappa_\sigma \notin I_c$ , problem (2.17) is well-posed in the Fredholm sense and, when it is well-posed, one can simply prove convergence of the cFE method.

- One can extend the results on problems (2.1) and (2.17) to the transmission problem with sign-changing coefficients and a Neumann boundary condition. Proceeding as in [38, Chap.1 §1.7], one simply changes the setting to work in the Hilbert space  $\{v \in H^1(\Omega) : \int_\Sigma v d\sigma = 0\}$ . One can work with the same geometrical transforms and find the same excluded interval as in the statement of theorem 2.2.
- The previous proof can be easily adapted to 2D geometries with a curved boundary or a curved interface, and more generally to 3D geometries. In particular, the case of the curved interface can be covered with the help of Theorem 3.1-1 of [44]. For an interface without corners, well-posedness in the Fredholm sense is established as soon as  $\kappa_\sigma \neq -1$  <sup>(8)</sup>. We refer to [54] for the first relation – and proof with the help of integral equations – of this result.
- Once the well-posedness of problem type (2.17) is established, one can easily solve the associated eigenvalue problem

$$\begin{cases} \text{Find } (u, \lambda) \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} \times \mathbb{C} \text{ such that:} \\ -\text{div}(\sigma \nabla u) = \lambda \varsigma u \text{ in } \Omega \end{cases}, \quad (2.18)$$

and derive classical error estimates for the eigenvalues' approximation by following [110] <sup>(9)</sup>.

8. cf. §2.B.1.

9. cf. chapter 4.

- Let us mention that a posteriori error estimates for diffusion problems with sign-changing coefficients have been carried out in [50] and lead to similar meshing requirements near the interfaces.
- On the other hand, the study of problem (2.1) when  $\kappa_\sigma$  belongs to the critical interval cannot be handled as previously, due to the existence of singularities [119, 24], ie. non trivial solutions of the homogeneous problem, that do not belong to  $H^1(\Omega)$ . This problem has been investigated in [18] for particular geometries: it requires a new functional framework explicitly taking into account the singularities. Some extensions are proposed in [12], providing a new numerical approximation method which relies on the use of Perfectly Matched Layers.

## 2.A Appendix

### 2.A.1 General construction of $\mathbf{R}$ around corners

In this section we generalize the tilings method presented in section 2.3 to any corner of angle  $\alpha \in 2\pi\mathbb{Q}$ . Recall that we define  $\alpha = 2\pi\frac{p}{p+q}$  in  $\Omega_1$ , with  $p, q > 0$  and  $p+q$  even. Note that the condition on the parity of  $p+q$  is by no means restrictive. Indeed if  $p+q$  is odd, one simply doubles  $p$  and  $q$  without changing the value of  $\alpha$ . In fact, one builds  $\mathbf{R}$  and  $\mathbf{R}'$  as the average of admissible operators, that is rotation- and symmetry-based operators. We propose  $\min(p, q)$  admissible operators below so that we obtain the desired result (that is operators  $\mathbf{R}$  and  $\mathbf{R}'$  with the same norm as in [15]), based on a simple algorithm.

Consider for instance that  $p \leq q$ . One constructs  $p$  admissible operators from  $V_1$  to  $V_2$ , the  $i$ -th operator ( $i = 1, p$ ) being obtained by:

- 1) in  $\Omega_2^{q+1-k}$ ,  $k = 1, i$ : apply  $\mathbf{S}^1$  to  $v_1^k$ ;
- 2) in  $\Omega_2^{p+1-k}$ ,  $k = i, p$ : apply  $\mathbf{S}^2$  to  $v_1^k$ ;
- 3) in  $\Omega_2^l$ ,  $l \in I := \llbracket p+2-i, q-i \rrbracket$ : apply alternately a rotation-based operator, then a rotation+symmetry-based operator, to  $v_1^i$ . From  $l = p+2-i$  to  $l = q-i$ , start by  $\mathbf{R}_{i-(p+l)}$ , then  $\mathbf{S}^2 \circ \mathbf{R}_{p+1-i-(l+1)}$ , update  $l \rightarrow l+2$  and so on.

At step 3), since  $q+p$  is even ( $|I| = q-p-1$  is odd), one always finishes by  $\mathbf{R}_{2i-(p+q)}$ . Note that other choices are possible for step 3).

One constructs  $p$  admissible operators from  $V_2$  to  $V_1$  similarly, the  $i$ -th operator ( $i = 1, p$ ) being obtained by:

- 4) in  $\Omega_1^k$ ,  $k = 1, \min(i, p-1)$ : apply  $\mathbf{S}^1$  to  $v_2^{q+1-k}$ ;
- 5) in  $\Omega_1^k$ ,  $k = \min(i+1, p), p$ : apply  $\mathbf{S}^2$  to  $v_2^{p+1-k}$ ;
- 6) in  $\Omega_1^i$ , if  $i < p$ , add up the remaining contributions  $(v_2^l)_{l \in I'}$ , with  $I' := \llbracket p+1-i, q-i \rrbracket$ : apply alternatively a rotation+symmetry-based operator then a rotation-based operator. For  $l = p+1-i$  to  $l = q-i$ , start by  $\mathbf{S}^2 \circ \mathbf{R}_{l-(p+1-i)}$  then apply  $-\mathbf{R}_{(l+1)+p-i}$ , update  $l \rightarrow l+2$  and so on. If  $i = p$  one adds up  $(v_2^l)_{l \in I' = \llbracket 2, q-p+1 \rrbracket}$ : for  $l = 2$  to  $l = q-p+1$  start with  $-\mathbf{R}_l$  then apply the rotation+symmetry-based operator  $\mathbf{S}^1 \circ \mathbf{R}_{(q-p+1)-(l+1)}$ , update  $l \rightarrow l+2$  and so on.

At step 6), in both cases,  $q+p$  is even ( $|I'| = q-p$  is even) so one applies successively pairs of operators. Note also that at step 6), one adds contributions in the  $i$ -th pattern of  $\Omega_1$ , already considered at step 4) or 5), and remark that when the index is zero,  $\mathbf{R}_0 = \mathbf{I}$  so that the rotation+symmetry-based operator simply becomes a symmetry-based operator.



Since  $p + q$  is even<sup>(10)</sup>, one can check that continuity is ensured at all interfaces of the patterns. The algorithm produces  $p$  operators from  $V_1$  to  $V_2$ , respectively from  $V_2$  to  $V_1$ . Then the operator  $\mathbf{R}$  (resp.  $\mathbf{R}'$ ) is defined as the average of the  $p$  operators from 1)-2)-3) (resp. 4)-5)-6)). By exchanging  $p$  with  $q$  (and  $\Omega_1$  with  $\Omega_2$ ), one addresses similarly the case  $q \leq p$ <sup>(11)</sup> to build the operators  $\mathbf{R}$  and  $\mathbf{R}'$  as the average of  $q$  operators.

From now on  $p, q$  are chosen such that  $0 < p < q$ , so that  $\mathbf{R}$  and  $\mathbf{R}'$  are the average of  $p$  operators.

Let us give an example: for  $p = 4, q = 6$  (that is  $\alpha = 4\pi/5$ ). Then one finds 4 admissible operators from  $V_1$  to  $V_2$  (each one corresponds to a column):

$$Rv_1 = \begin{cases} \mathbf{S}^2v_1^4, & \mathbf{S}^2v_1^4, & \mathbf{S}^2v_1^4, & \mathbf{S}^2v_1^4, & \text{in } \Omega_2^1 \\ \mathbf{S}^2v_1^3, & \mathbf{S}^2v_1^3, & \mathbf{S}^2v_1^3, & \mathbf{R}_{-2}v_1^4, & \text{in } \Omega_2^2 \\ \mathbf{S}^2v_1^2, & \mathbf{S}^2v_1^2, & \mathbf{R}_{-4}v_1^3, & \mathbf{S}^1v_1^4, & \text{in } \Omega_2^3 \\ \mathbf{S}^2v_1^1, & \mathbf{R}_{-6}v_1^2, & \mathbf{S}^1v_1^3, & \mathbf{S}^1v_1^3, & \text{in } \Omega_2^4 \\ \mathbf{R}_{-8}v_1^1, & \mathbf{S}^1v_1^2, & \mathbf{S}^1v_1^2, & \mathbf{S}^1v_1^2, & \text{in } \Omega_2^5 \\ \mathbf{S}^1v_1^1, & \mathbf{S}^1v_1^1, & \mathbf{S}^1v_1^1, & \mathbf{S}^1v_1^1, & \text{in } \Omega_2^6 \end{cases}$$

In this example,  $|I| = 1$  so one applies only one rotation-based operator (following step 3)). Conversely, one finds 4 admissible operators from  $V_2$  to  $V_1$ :

$$R'v_2 = \begin{cases} \mathbf{S}^1v_2^6 - \mathbf{R}_8v_2^5 + \mathbf{S}^2v_2^4, & \mathbf{S}^1v_2^6, & \mathbf{S}^1v_2^6, & \mathbf{S}^1v_2^6, & \text{in } \Omega_1^1 \\ \mathbf{S}^2v_2^3, & \mathbf{S}^1v_2^5 - \mathbf{R}_6v_2^4 + \mathbf{S}^2v_2^3, & \mathbf{S}^1v_2^5, & \mathbf{S}^1v_2^5, & \text{in } \Omega_1^2 \\ \mathbf{S}^2v_2^2, & \mathbf{S}^2v_2^2, & \mathbf{S}^1v_2^4 - \mathbf{R}_4v_2^3 + \mathbf{S}^2v_2^2, & \mathbf{S}^1v_2^4, & \text{in } \Omega_1^3 \\ \mathbf{S}^2v_2^1, & \mathbf{S}^2v_2^1, & \mathbf{S}^2v_2^1, & \mathbf{S}^2v_2^1 - \mathbf{R}_2v_2^2 + \mathbf{S}^1v_2^3, & \text{in } \Omega_1^4 \end{cases}$$

Here  $|I'| = 2$  so one applies two additional operators to  $v_2^l, l \in I'$  (following step 6)).

With these guidelines one can write the operator  $\mathbf{R}$  for any  $p, q$  chosen as above.

A convenient way to describe the action of  $\mathbf{R}$  on  $w_1$ , for  $w_1 \in V_1$ , is to define a matrix  $M \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R})$ , and to rewrite the action locally. First, for  $n \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , define  $M_{p-n+1}, \widetilde{M}_{p-n+1} \in \mathcal{M}_{p-n+1,p}(\mathbb{R})$  such

10. Whereas if  $p + q$  were odd, continuity would not be ensured at all interfaces: e.g. for 1)-2)-3), at the interface between  $\Omega_2^{p-i}$  and  $\Omega_2^{p-i+1}$ .

11. The case  $p = q$  corresponds to a plane interface.

that

$$M_{p-n+1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \frac{p}{p} \\ \vdots & & & & & & & & \ddots & \frac{p-1}{p} & \frac{1}{p} \\ \vdots & & \{0\} & & & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \frac{j}{p} & \ddots & \left\{\frac{1}{p}\right\} \\ \vdots & & & & & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{n}{p} & \frac{1}{p} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{1}{p} \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{M}_{p-n+1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{p} & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{1}{p} & \frac{n}{p} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \left\{\frac{1}{p}\right\} & \ddots & \frac{p-j+1}{p} & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \{0\} & & \vdots \\ \frac{1}{p} & \frac{p-1}{p} & \ddots & & & & & & \vdots \\ \frac{p}{p} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

where  $j$  denotes the column index. All entries are equal to 0 or  $\frac{1}{p}$ , except on one diagonal where they range from  $\frac{n}{p}$  to  $\frac{p}{p} = 1$ . Then the shape of  $M$  depends on whether  $p \leq \frac{q}{2}$ :

- if  $p \leq q/2$  : let  $m \in \mathbb{N}$  such that  $q = 2p + m$ . Then the matrix  $M$  is written  $M = \begin{pmatrix} M_p \\ M'_m \\ \widetilde{M}_p \end{pmatrix}$  with

$M_p, \widetilde{M}_p \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  (defined above for  $n = 1$ ) and  $M'_m \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$  whose entries are all equal to  $1/p$ , with the convention that if  $m = 0$ ,  $M'_m$  is empty.

- if  $p > q/2$  : let  $m \in \mathbb{N}^*$  such that  $q = 2p - m$ . If  $m > 2$  then the matrix  $M$  is written

$$M = \begin{pmatrix} M_{p-m+1} \\ M''_{m-2} \\ \widetilde{M}_{p-m+1} \end{pmatrix}, \text{ with } M_{p-m+1}, \widetilde{M}_{p-m+1} \in \mathcal{M}_{p-m+1,p}(\mathbb{R}) \text{ (defined above for } n = m) \text{ and } M''_{m-2} \in \mathcal{M}_{m-2,p}(\mathbb{R}) \text{ such that}$$

$$M''_{m-2} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \frac{m-1}{p} & \frac{1}{p} & \cdots & \frac{1}{p} & \frac{2}{p} & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \{0\} & \ddots & \frac{m-i}{p} & \ddots & \left\{\frac{1}{p}\right\} & \ddots & \frac{1+i}{p} & \ddots & \{0\} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \frac{2}{p} & \underbrace{\frac{1}{p} \cdots \frac{1}{p}}_{p-m-1} & \frac{m-1}{p} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

where  $i$  denotes the row index. One simply finds the matrix  $M = \begin{pmatrix} M_{p-1} \\ \frac{1}{p} \cdots \frac{1}{p} \\ \widetilde{M}_{p-1} \end{pmatrix}$  when  $q = 2p - 1$ ,

and the matrix  $M = \begin{pmatrix} M_{p-1} \\ \widetilde{M}_{p-1} \end{pmatrix}$  when  $q = 2p - 2$ .

Hence, the matricial expression of  $Rw_1$  writes

$$Rw_1(\rho, \theta) = \sum_{k=1,p} \pm M_{lk} \mathbf{I}_{kl} w_1^k(\rho, \theta) = \sum_{k=1,p} \pm M_{lk} w_1^k(\mathcal{I}_{kl}(\rho, \theta)), \quad \text{for } (\rho, \theta) \in \Omega_2^l, \quad l = 1, q,$$

where  $\mathcal{I}_{kl}$ ,  $k = 1, p$ ,  $l = 1, q$ , denote the isometries, and  $\mathbf{I}_{kl}$ ,  $k = 1, p$ ,  $l = 1, q$ , denote the isometry-based operators.

Note that the cases  $p \geq q$  are obtained by taking the transposed matrix presented above. Moreover, one checks easily by direct inspection the next result.

**Proposition 2.1.** *The matrix  $M \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R})$  satisfies the following properties:*

$$[1] \left\{ \begin{array}{l} \forall l = 1, q, \forall k = 1, p, M_{lk} \geq 0 \\ \exists l_0, k_0 \text{ s.t. } M_{l_0 k_0} = 1 \end{array} \right. ; [2] \forall l, \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^p M_{lk} = 1 \quad \text{if } p \leq q \\ \sum_{k=1}^p M_{lk} \leq \frac{p}{q} \quad \text{if } p \geq q \end{array} \right. ; [3] \forall k, \left\{ \begin{array}{l} \sum_{l=1}^q M_{lk} \leq \frac{q}{p} \quad \text{if } p \leq q \\ \sum_{l=1}^q M_{lk} = 1 \quad \text{if } p \geq q \end{array} \right.$$

It follows that

**Proposition 2.2.** *For all  $p, q > 0$  let  $M \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R})$  be a matrix which satisfies the properties of proposition 2.1. Then*

$$\|M^T M\|_2 \leq \max\left(\frac{q}{p}, \frac{p}{q}\right).$$

*Proof.* Define  $A := M^T M$ , and  $\lambda_{\max} = \max_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda > 0$ . Using Gershgorin circle theorem one bounds the spectrum of  $A$  as follows:

$$\forall \lambda \in \sigma(A), \forall k = 1, p, |\lambda - A_{kk}| \leq \sum_{l \neq k} A_{kl},$$

then

$$\begin{aligned} \lambda_{\max} &\leq \max_{k=1,p} (A_{kk} + \sum_{l \neq k} A_{kl}) = \max_{k=1,p} \left( \sum_{l=1,p} A_{kl} \right) \\ &\leq \max_{k=1,p} \left( \sum_{l=1}^p \sum_{h=1}^q (M^T)_{kh} M_{hl} \right) = \max_{k=1,p} \left( \sum_{l=1}^p \sum_{h=1}^q M_{hk} M_{hl} \right) \\ &\leq \max_{k=1,p} \left( \sum_{h=1}^q \left( \sum_{l=1}^p M_{hl} \right) M_{hk} \right). \end{aligned}$$

Due to the second property in proposition 2.1 satisfied by  $M$  one has (depending on the values of  $p, q$ ):

$$\lambda_{\max} \leq \max_{k=1,p} \left( \max\left(1, \frac{p}{q}\right) \sum_{h=1}^q M_{hk} \right),$$

using the third property in proposition 2.1 one finds

$$\lambda_{\max} \leq \max\left(1, \frac{p}{q}\right) \max\left(1, \frac{q}{p}\right) = \max\left(\frac{p}{q}, \frac{q}{p}\right).$$

□

We emphasize that the interest of such tilings operators  $\mathbf{R}$  is in generalizing the results obtained in [105, 15]. This alternative approach has the advantage of being directly applicable to the discrete problem as explained in section 2.5.

Let us make some comments to adapt the tilings method to any corner angle  $\alpha \in \mathbb{R}$ . In that case, one cannot use rotation- and symmetry-based operators anymore, nor local regular pattern-based neighborhoods. Nonetheless one derives near-optimal results as follows: one chooses a nearby angle value  $\alpha_{adm}$  which belongs to  $2\pi\mathbb{Q}$ , and the tilings for  $\alpha$  are derived from the regular ones for  $\alpha_{adm}$  via some geometrical transforms. For example take  $\alpha = 93^\circ$ , and  $\alpha_{adm} = 90^\circ$  for which  $p = 2$  and  $q = 6$  are possible values. So, one can split  $\Omega_1$  into two triangles of angle  $46,5^\circ$  (not necessarily isocèles), and  $\Omega_2$  into six triangles of angle  $44,5^\circ$  (not necessarily isocèles). One uses affine transforms that transform one triangle of  $\Omega_1$  into a triangle of  $\Omega_2$ , and vice versa. By choice, the norms of the transforms are slightly larger than 1 (but not equal to 1, since they are not isometries anymore). Obviously, since  $\mathbb{Q}$  is dense in  $\mathbb{R}$ , one can theoretically come as close to  $\alpha$  as desired.

## 2.A.2 Some technical results

We provide some explicit bounds to bound the operator norms locally: near corners (proposition 2.3) and near edges (proposition 2.4).

**Proposition 2.3.** *Let  $\xi$  be a smooth positive function with support  $S$ , that depends only on the distance to the corner of angle  $\alpha = 2\pi\frac{p}{p+q}$ . Then*

$$\begin{aligned} \forall w_1 \in V_1, \quad & \|\xi^{1/2} \nabla(\mathbf{R}w_1)\|_{\Omega_2 \cap S}^2 \leq I_\alpha \|\xi^{1/2} \nabla w_1\|_{\Omega_1 \cap S}^2, \\ \exists w_1^0 \in V_1, \quad & \|\xi^{1/2} \nabla(\mathbf{R}w_1^0)\|_{\Omega_2 \cap S}^2 \geq \|\xi^{1/2} \nabla w_1^0\|_{\Omega_1 \cap S}^2, \end{aligned}$$

where  $I_\alpha = \max\left(\frac{p}{q}, \frac{q}{p}\right)$ , and  $\mathbf{R}$  is a rotation- and symmetry-based operator from  $V_1$  to  $V_2$  defined as in (2.12).

*Proof.* Let  $w_1 \in V_1$ .

$$\begin{aligned} \|\xi^{1/2} \nabla(\mathbf{R}w_1)\|_{\Omega_2 \cap S}^2 &= \int_{\Omega_2 \cap S} \xi(\rho) \left( \left| \frac{\partial(\mathbf{R}w_1)}{\partial\rho} \right|^2 + \frac{1}{\rho^2} \left| \frac{\partial(\mathbf{R}w_1)}{\partial\theta} \right|^2 \right) \rho d\rho d\theta \\ &= \sum_{l=1}^q \int_{\Omega_2^l \cap S} \xi(\rho) \left( \left| \frac{\partial(\mathbf{R}w_1)}{\partial\rho} \right|^2 + \frac{1}{\rho^2} \left| \frac{\partial(\mathbf{R}w_1)}{\partial\theta} \right|^2 \right) \rho d\rho d\theta. \end{aligned}$$

Recall that one has the local relations (2.A.1). Using Cauchy-Schwarz inequality and noting that  $0 \leq M_{kl} \leq 1$  for all  $k, l$ , one finds that

$$\left. \begin{aligned} \left| \frac{\partial(\mathbf{R}w_1)}{\partial\rho}(\rho, \theta) \right|^2 &= \left| \sum_{k=1}^p \pm M_{lk} \frac{\partial w_1^k(\mathcal{I}_{kl}(\rho, \theta))}{\partial\rho} \right|^2 \leq \sum_{k=1}^p M_{lk} \left| \frac{\partial w_1^k(\mathcal{I}_{kl}(\rho, \theta))}{\partial\rho} \right|^2 \\ \left| \frac{\partial(\mathbf{R}w_1)}{\partial\theta}(\rho, \theta) \right|^2 &= \left| \sum_{k=1}^p \pm M_{lk} \frac{\partial w_1^k(\mathcal{I}_{kl}(\rho, \theta))}{\partial\theta} \right|^2 \leq \sum_{k=1}^p M_{lk} \left| \frac{\partial w_1^k(\mathcal{I}_{kl}(\rho, \theta))}{\partial\theta} \right|^2 \end{aligned} \right\} \text{for } (\rho, \theta) \in \Omega_2^l, l = 1, q.$$

Then

$$\begin{aligned} \|\xi^{1/2} \nabla(\mathbf{R}w_1)\|_{\Omega_2 \cap S}^2 &\leq \sum_{l=1}^q \sum_{k=1}^p M_{lk} \int_{\Omega_2^l \cap S} \xi(\rho) \left( \left| \frac{\partial(w_1^k(\mathcal{I}_{kl}(\rho, \theta)))}{\partial \rho} \right|^2 + \frac{1}{\rho^2} \left| \frac{\partial(w_1^k(\mathcal{I}_{kl}(\rho, \theta)))}{\partial \theta} \right|^2 \right) \rho d\rho d\theta, \\ &\leq \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^q \left( M_{lk} \int_{\Omega_2^l \cap S} \xi(\rho) \left( \left| \frac{\partial(w_1^k(\mathcal{I}_{kl}(\rho, \theta)))}{\partial \rho} \right|^2 + \frac{1}{\rho^2} \left| \frac{\partial(w_1^k(\mathcal{I}_{kl}(\rho, \theta)))}{\partial \theta} \right|^2 \right) \rho d\rho d\theta \right). \end{aligned}$$

For each  $k = 1, p$ , one uses the change of variables  $(\rho, \theta) \mapsto (r_k, \varphi_k) = \mathcal{I}_{kl}(\rho, \theta)$  ( $\det |\mathcal{I}_{kl}| = 1$  and for all  $k$ ,  $\xi(r_k) = \xi(\rho)$ ) that maps  $\Omega_2^l$  to  $\Omega_1^k$  to find

$$\begin{aligned} \|\xi^{1/2} \nabla(\mathbf{R}w_1)\|_{\Omega_2 \cap S}^2 &\leq \sum_{k=1}^p \left( \sum_{l=1}^q M_{lk} \int_{\Omega_1^k \cap S} \xi(r_k) \left( \left| \frac{\partial w_1^k(r_k, \varphi_k)}{\partial r_k} \right|^2 + \frac{1}{r_k^2} \left| \frac{\partial w_1^k(r_k, \varphi_k)}{\partial \varphi_k} \right|^2 \right) r_k dr_k d\varphi_k \right) \\ &\leq \sum_{k=1}^p \left( \left( \int_{\Omega_1^k \cap S} \xi(r_k) \left( \left| \frac{\partial w_1^k(r_k, \varphi_k)}{\partial r_k} \right|^2 + \frac{1}{r_k^2} \left| \frac{\partial w_1^k(r_k, \varphi_k)}{\partial \varphi_k} \right|^2 \right) r_k dr_k d\varphi_k \right) \sum_{l=1}^q M_{lk} \right) \end{aligned}$$

Using proposition 2.1 one finally gets

$$\begin{aligned} &\leq I_\alpha \sum_{k=1}^p \int_{\Omega_1^k \cap S} \xi(r_k) \left( \left| \frac{\partial w_1^k(r_k, \varphi_k)}{\partial r_k} \right|^2 + \frac{1}{r_k^2} \left| \frac{\partial w_1^k(r_k, \varphi_k)}{\partial \varphi_k} \right|^2 \right) r_k dr_k d\varphi_k \\ &\leq I_\alpha \sum_{k=1}^p \|\xi^{1/2} \nabla w_1^k\|_{\Omega_1^k \cap S}^2 \\ &\leq I_\alpha \|\xi^{1/2} \nabla w_1\|_{\Omega_1 \cap S}^2. \end{aligned}$$

Noting finally that there is always a unit entry in  $M$  according to proposition 2.1 (denoted by  $M_{k_0 l_0}$ ), one readily checks that if  $w_1^0 \in V_1$  with  $\text{supp}(w_1^0) \subset \Omega_1^{k_0} \cap S$ , then it follows

$$\|\xi^{1/2} \nabla(\mathbf{R}w_1^0)\|_{\Omega_2 \cap S}^2 \geq \|\xi^{1/2} \nabla w_1^0\|_{\Omega_1 \cap S}^2.$$

□

**Proposition 2.4.** *Let  $\xi$  be a smooth positive function with support  $S$  that is symmetric with respect to the interface. Then for all  $w_1 \in V_1$*

$$\|\xi^{1/2} \nabla(\mathbf{R}w_1)\|_{\Omega_2 \cap S}^2 = \|\xi^{1/2} \nabla w_1\|_{\Omega_1 \cap S}^2,$$

where  $\mathbf{R}$  is the symmetry-based operator (2.13).

*Proof.* This inequality is obtained using the change of variables  $(x^\Sigma, y^\Sigma) \rightarrow (x^\Sigma, -y^\Sigma)$  in  $\Omega_2 \cap S$ . For all  $w_1 \in V_1$

$$\begin{aligned} \|\xi^{1/2} \nabla(\mathbf{R}w_1)\|_{\Omega_2 \cap S}^2 &= \int_{\Omega_2 \cap S} \xi(x^\Sigma, y^\Sigma) \left( \left| \frac{\partial(\mathbf{R}w_1)}{\partial x^\Sigma} \right|^2 + \left| \frac{\partial(\mathbf{R}w_1)}{\partial y^\Sigma} \right|^2 \right) dx^\Sigma dy^\Sigma \\ &= \int_{\Omega_1 \cap S} \xi(x^\Sigma, y^\Sigma) \left( \left| \frac{\partial w_1}{\partial x^\Sigma} \right|^2 + \left| \frac{\partial w_1}{\partial y^\Sigma} \right|^2 \right) dx^\Sigma dy^\Sigma = \|\xi^{1/2} \nabla w_1\|_{\Omega_1 \cap S}^2. \end{aligned}$$

□

### 2.A.3 Uniform local Finite Element estimate

Let  $\hat{\tau}$  be the reference triangle, with corners  $(1,0)$ ,  $(0,1)$  and  $(0,0)$ , and let  $\hat{I}_d$  be the Lagrange interpolation operator over  $\mathbb{P}_d(\hat{\tau})$ . Given  $(\mathcal{T}_h)_h$  a regular family of triangulations we call  $I_\tau^d$  the Lagrange interpolation operator over  $\mathbb{P}_d(\tau)$ , for all  $h$  and all  $\tau \in \mathcal{T}_h$ .

**Proposition 2.5.** *On the reference triangle  $\hat{\tau}$ , one has the estimate*

$$\exists \hat{C} > 0, \forall \hat{\chi} \in \mathbb{P}_1(\hat{\tau}), \forall \hat{v} \in \mathbb{P}_d(\hat{\tau}), \|\hat{\nabla}(\hat{\chi}\hat{v} - \hat{I}_d(\hat{\chi}\hat{v}))\|_{\hat{\tau}} \leq \hat{C} |\hat{\chi}|_{W^{1,\infty}(\hat{\tau})} \|\hat{\nabla}\hat{v}\|_{\hat{\tau}}. \quad (2.19)$$

As a consequence, one has the uniform local estimate

$$\exists C > 0, \forall h, \forall \tau \in \mathcal{T}_h, \forall \chi \in \mathbb{P}_1(\tau), \forall v \in \mathbb{P}_d(\tau), \|\nabla(\chi v - I_\tau^d(\chi v))\|_\tau \leq C h_\tau |\chi|_{W^{1,\infty}(\tau)} \|\nabla v\|_\tau. \quad (2.20)$$

*Proof.* Write  $\hat{\chi}(\hat{x}, \hat{y}) = \alpha + \hat{\chi}_1(\hat{x}, \hat{y})$ , resp.  $\hat{v}(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{v}_-(\hat{x}, \hat{y}) + \hat{v}_d(\hat{x}, \hat{y})$  where  $\hat{\chi}_1(\hat{x}, \hat{y}) = \beta\hat{x} + \gamma\hat{y}$ , resp.  $\hat{v}_d(\hat{x}, \hat{y}) = \sum_{i=0,d} a_i \hat{x}^i \hat{y}^{d-i}$  and  $\deg(\hat{v}_-) < d$ . For  $i = 0, d$ , define  $\hat{e}_i(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{x}^{i+1} \hat{y}^{d-i} - \hat{I}_d(\hat{x}^{i+1} \hat{y}^{d-i})$ , resp.  $\hat{f}_i(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{x}^i \hat{y}^{d+1-i} - \hat{I}_d(\hat{x}^i \hat{y}^{d+1-i})$ . Note that  $|\hat{\chi}|_{W^{1,\infty}(\hat{\tau})} = \max(|\beta|, |\gamma|)$ .

Since there holds  $\hat{\chi}\hat{v} - \hat{I}_d(\hat{\chi}\hat{v}) = \hat{\chi}_1\hat{v}_d - \hat{I}_d(\hat{\chi}_1\hat{v}_d) = \beta \sum_{i=0,d} a_i \hat{e}_i(\hat{x}, \hat{y}) + \gamma \sum_{i=0,d} a_i \hat{f}_i(\hat{x}, \hat{y})$ , one finds

$$\begin{aligned} \left| \hat{\nabla}(\hat{\chi}\hat{v} - \hat{I}_d(\hat{\chi}\hat{v}))(\hat{x}, \hat{y}) \right| &\leq |\beta| \sum_{i=0,d} |a_i| |\hat{\nabla}\hat{e}_i(\hat{x}, \hat{y})| + |\gamma| \sum_{i=0,d} |a_i| |\hat{\nabla}\hat{f}_i(\hat{x}, \hat{y})| \\ &\leq |\hat{\chi}|_{W^{1,\infty}(\hat{\tau})} \sum_{i=0,d} |a_i| \left( |\hat{\nabla}\hat{e}_i(\hat{x}, \hat{y})| + |\hat{\nabla}\hat{f}_i(\hat{x}, \hat{y})| \right) \\ &\leq |\hat{\chi}|_{W^{1,\infty}(\hat{\tau})} \left( \sum_{i=0,d} |a_i|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{i=0,d} \left( |\hat{\nabla}\hat{e}_i(\hat{x}, \hat{y})| + |\hat{\nabla}\hat{f}_i(\hat{x}, \hat{y})| \right)^2 \right)^{1/2} \\ &\leq |\hat{\chi}|_{W^{1,\infty}(\hat{\tau})} \left( \sum_{i=0,d} |a_i|^2 \right)^{1/2} \left( 2 \sum_{i=0,d} \left( |\hat{\nabla}\hat{e}_i(\hat{x}, \hat{y})|^2 + |\hat{\nabla}\hat{f}_i(\hat{x}, \hat{y})|^2 \right) \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

It follows that  $\|\hat{\nabla}(\hat{\chi}\hat{v} - \hat{I}_d(\hat{\chi}\hat{v}))\|_{\hat{\tau}} \leq \hat{C}_d |\hat{\chi}|_{W^{1,\infty}(\hat{\tau})} (\sum_{i=0,d} |a_i|^2)^{1/2}$ , with  $\hat{C}_d = \sqrt{2} [\sum_{i=0,d} (\|\hat{\nabla}\hat{e}_i\|_{\hat{\tau}}^2 + \|\hat{\nabla}\hat{f}_i\|_{\hat{\tau}}^2)]^{1/2}$ .

Then, we remark that the  $\ell^2$ -norm of the coefficients is a norm over  $\mathbb{P}_d(\hat{\tau})$ , hence it is also a norm over its vector subspace  $\mathbb{P}_d^{zmv}(\hat{\tau})$  made of zero-mean value polynomials on  $\hat{\tau}$ . Now, over  $\mathbb{P}_d^{zmv}(\hat{\tau})$ , the semi-norm  $\|\hat{\nabla} \cdot\|_{\hat{\tau}}$  is also a norm and because  $\mathbb{P}_d^{zmv}(\hat{\tau})$  is a finite dimensional vector space, both norms are equivalent. Noting finally that, starting from  $\hat{v}$ , one has only to modify the degree-0 coefficient to obtain a zero-mean value polynomial, we finally get that there exists  $\hat{C}'$  independent of  $\hat{v}$  such that  $(\sum_{i=0,d} |a_i|^2)^{1/2} \leq \hat{C}' \|\hat{\nabla}\hat{v}\|_{\hat{\tau}}$ . Taking  $\hat{C} = \hat{C}_d \hat{C}'$  leads to (2.19).

We recall that provided the family of triangulations  $(\mathcal{T}_h)_h$  is regular, there exists  $\mathbf{s} > 0$  such that, for all  $h$  and for all  $\tau \in \mathcal{T}_h$ , there holds  $h_\tau \leq \mathbf{s} \rho_\tau$ , where  $\rho_\tau$  us the diameter of the largest ball that can be inscribed in  $\tau$ . One can then derive (2.20) from (2.19) by using the affine mapping from the reference triangle  $\hat{\tau}$  to the triangle  $\tau \in \mathcal{T}_h$ . We refer for instance to [61]. We report here the computations for the sake of completeness ( $C_0, C_1, \dots$  are constants that are independent of  $h$  and  $\tau$ ):

$$\begin{aligned} \|\nabla(\chi v - I_\tau^d(\chi v))\|_\tau &\leq C_0 \mathbf{s} \|\hat{\nabla}(\hat{\chi}\hat{v} - \hat{I}_d(\hat{\chi}\hat{v}))\|_{\hat{\tau}} && \text{cf. Lemmas 1.100-1.101 of [61]} \\ &\leq C_1 |\hat{\chi}|_{W^{1,\infty}(\hat{\tau})} \|\hat{\nabla}\hat{v}\|_{\hat{\tau}} && \text{cf. (2.19)} \\ &\leq C_2 h_\tau |\chi|_{W^{1,\infty}(\tau)} \times C_3 \mathbf{s} \|\nabla v\|_\tau && \text{cf. Lemmas 1.100-1.101 of [61],} \end{aligned}$$

that is (2.20) with  $C = C_2 C_3 \mathbf{s}$ . □

## 2.B Some extensions

### 2.B.1 The treatment of curved interfaces

Let us briefly explain how to proceed in the more general case where the edges of the interface  $\Sigma$  are curved. The idea remains the same as in section 2.4: define a well-chosen neighborhood of the curved interface, then apply the tilings method. In the following we keep the notations introduced in section 2.4. For simplicity we present the results for one curved edge, nonetheless one can easily generalize this approach in the case of  $N$  curved edges.

Suppose that the interface  $\Sigma$  is a curved polygonal line with  $N$  corners  $c_n$  ( $n = 1, N$ ),  $N - 1$  straight edges  $e_n$  ( $n = 1, N - 1$ ), and one curved edge  $e^c$ . The interface is of class  $C^2$  (except at the corners). Let  $l$  be chosen among  $\llbracket 1, N - 2 \rrbracket$ , and let  $e_l$  and  $e_{l+1}$  be the two straight edges that frame  $e^c$ . Since  $\overline{e^c}$  is of class  $C^2$  we know that we can rewrite  $\overline{e^c}$  as a finite union of closed sets with disjoint interiors, namely  $e^c = \cup_{m \leq M} \overline{\omega_m}$ , that can be mapped to an open interval of  $\mathbb{R}$  via a  $C^2$  map. Using Theorem 3.1-1 of [44], we claim that we can build (tubular) regions of  $\Omega$ , with arbitrary small height  $\eta > 0$ : for each  $m$ , the tubular region is defined above and below  $\omega_m$  with the help of the so-called canonical extension. Precisely, if we let  $\hat{\omega}_m$  be the open interval, respectively  $\vec{\vartheta}_m : \hat{\omega}_m \rightarrow \omega_m$  the  $C^2$  map, that we introduced above, then the tubular region is defined as

$$O_m := \{x \in \Omega : \exists (s, t) \in \hat{\omega}_m \times ]-\eta, \eta[, x = \vec{\vartheta}_m(s) + t\vec{\nu}_m(s)\}$$

where  $\vec{\nu}_m(s)$  is a unit vector, perpendicular to  $\vec{\vartheta}_m(s)$  and pointing to  $\Omega_2$ , for all  $s \in \hat{\omega}_m$ . We have defined  $\overline{B_P} := \cup_m \overline{O_m}$  the neighborhood of  $\overline{e^c}$ .

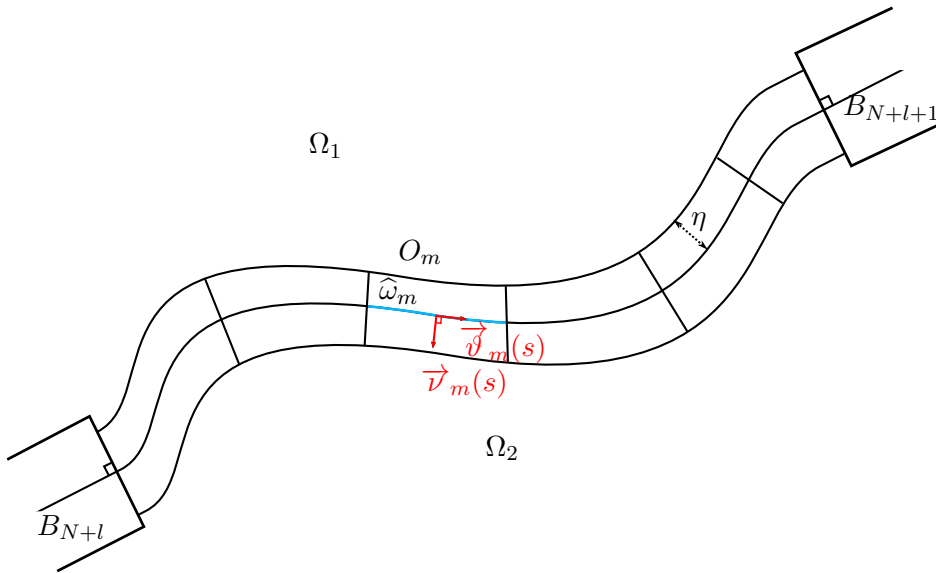


Figure 2.10: Notations around a curved interface.

By construction, we have that  $O_m \cap O_n = \emptyset$  for  $m \neq n$ , and moreover when  $\partial B_P \cap \partial B_{N+l} \neq \emptyset$   $\partial B_P \cap \partial B_{N+l+1} \neq \emptyset$  (we recall that the straight edge neighborhoods are denoted by  $B_{N+n}$ ,  $n = 1, N - 1$ ),

the shared edge is perpendicular to  $\Sigma$ , see figure 2.10. Finally, we note that

$$|\partial_s x - \vec{\vartheta}'_m|_{L^\infty(\hat{\omega}_m \times ]-\eta, \eta])} \leq O(\eta). \quad (2.21)$$

$B_P$  is a tubular-based domain, and we are now in a position to define the tilings-based operator  $\mathbf{R}_P$ . For  $x \in \Omega_2$  we get:

$$\mathbf{R}_P v_1(x) = \begin{cases} v_1(\vec{\vartheta}'_m(s) - t\vec{\nu}'_m(s)) & \text{if } x \in O_m \text{ for some } m \\ 0 & \text{if } x \notin B_P \end{cases} \quad (2.22)$$

In  $O_m$ , we write  $x = \vec{\vartheta}'_m(s) + t\vec{\nu}'_m(s)$ , with  $(s, t) \in \hat{\omega}_m \times ]0, \eta[$ . Now let us define the cutoff function  $\chi_P$  of support  $S_P \subset \overline{B_P} \cup \overline{B_{N+l}} \cup \overline{B_{N+l+1}}$ , equal to 1 in the neighborhood of the interface, and symmetric with respect to the interface when we are "close" to  $\Sigma$ . Then we remark that, thanks to (2.21), one has the bound  $\|\nabla(\mathbf{R}_k w_1)\|_{\Omega_2 \cap O_m}^2 \leq (1 + O(\eta)) \|\nabla w_1\|_{\Omega_1 \cap O_m}^2$  for all  $w_1 \in H^1(\Omega_1 \cap O_m)$ . Indeed, the parameterized area elements are such that  $d\Omega_2(s, t) = (1 + O(\eta))d\Omega_1(s, t)$ , see for instance Theorem 1.2-1 of [44], and likewise for the components of the gradients. With the properties of  $\chi_P$ , one also obtains  $\|\chi_P^{1/2} \nabla(\mathbf{R}_k w_1)\|_{\Omega_2 \cap O_m \cap S_P}^2 \leq (1 + O(\eta)) \|\chi_P^{1/2} \nabla w_1\|_{\Omega_1 \cap O_m \cap S_P}^2$  for all  $w_1 \in H^1(\Omega_1 \cap O_m \cap S_P)$ . Again, by inverting the role of  $\Omega_1$  and  $\Omega_2$ , one defines  $\mathbf{R}'_P$  such that for all  $v_2$  defined over  $\Omega_2$ ,  $\mathbf{R}'_P v_2(x) = v_2(\vec{\vartheta}'_m(s) - t\vec{\nu}'_m(s))$  if  $x \in O_m$  for some  $m$ , with  $x = \vec{\vartheta}'_m(s) + t\vec{\nu}'_m(s)$ , and  $(s, t) \in \hat{\omega}_m \times ]-\eta, 0[$ . One can choose  $\eta$  small enough – which depends only on the geometry of the interface – to ensure that

$$\|\mathbf{R}_P\|^2 \leq C_0, \quad \|\mathbf{R}'_P\|^2 \leq C_0$$

with some constant  $C_0 > 1$ . One can choose  $\eta$  small enough so that  $C_0 < I_\alpha$ , then in the case of a curved polygonal interface the result of corollary 2.1 holds.

Concerning the approximation, when the curved interface and its normal vector field can be described by "polynomial relations", one can carry out the same numerical analysis as before using isoparametric quadrilateral FE (cf. [45, §4.3, pp. 224-248]) near the curved interface, ie. in the region  $B_P$ . Let us outline the process.

As we described the region near the curved interface as a tubular region (with the help of piecewise curvilinear coordinates), this region is obtained via a transform that relies on mapping quadrilaterals with straight edges to curved quadrilaterals (cf. the definition of  $O_m$ ). In addition, the operator  $\mathbf{R}_P$  (see (2.22)) maps curved quadrilaterals of  $\Omega_2$  to curved quadrilaterals of  $\Omega_1$ .

What is more, this last property remains true if those two regions,  $\text{int}(S_P) \cap \Omega_i$  for  $i = 1, 2$ , are split into (small) curved quadrilaterals  $\mathbf{q} \in \mathcal{T}_h$ , whereas the rest of  $\Omega$  is split into triangles as before. Indeed, if the quadrilaterals  $\mathbf{q}$  are defined via mappings from straight quadrilaterals such as  $(s, t) \in ]s_-, s_+[\times]t_-, t_+[$ , then for all  $\mathbf{q} \in \mathcal{T}_{h,2}^{\mathbf{q},P}$ , the pre-image of  $\mathbf{q}$  by  $\mathbf{R}_P$  belongs to  $\mathcal{T}_{h,1}^{\mathbf{q},P}$ , where  $\mathcal{T}_{h,i}^{\mathbf{q},P} := \{\mathbf{q} \in \mathcal{T}_h : \mathbf{q} \cap \text{int}(S_P) \cap \Omega_i \neq \emptyset\}$ , for  $i = 1, 2$ . In the case of curved interfaces, the meshes  $(\mathcal{T}_h)_h$  are said to be *locally T-conform* if this property is fulfilled in addition to the "classical" property of definition 2.3.

If the above conditions are met then, given  $v^h \in V^h$ ,  $\mathbf{R}_P v_1^h$  is equal to the restriction of some element of  $V_2^h$  over  $\Omega_2 \cap \text{int}(S_P)$ , therefore we conclude that can extend the previous results of section 2.5.

## 2.B.2 Inf-sup condition with the T-coercivity and proof of theorem 2.1

In this section we wish to give a proof of theorem 2.1, and some similar results in the case of a sesquilinear form.



Given a continuous sesquilinear form  $a(\cdot, \cdot)$  over  $V \times V$ , define the operator  $A : V \rightarrow V'$  such that  $\langle Av, w \rangle = a(w, v)$  for all  $v, w \in V$  (see section 2.4). We also introduce the (continuous linear) operator  $A^\dagger$  from  $V$  to  $V'$  such that  $\langle A^\dagger v, w \rangle = \overline{a(w, v)}$  for all  $v, w \in V$ ;  $A^\dagger$  is called the conjugate transpose of  $A$ . By construction  $(A^\dagger)^\dagger = A$ . Note that when  $a$  is hermitian, one has  $A^\dagger = A$ .

**Proposition 2.6.** *Let  $a(\cdot, \cdot)$  be a continuous sesquilinear form over  $V \times V$ ,  $A$  and  $A^\dagger$  the operators introduced above. Consider to the three assertions below:*

- (i)  $A$  and  $A^\dagger$  are Fredholm operators;
- (ii) the forms  $a$  and  $(v, w) \mapsto \overline{a(w, v)}$  satisfy weak stability conditions;
- (iii) the form  $a$  is weakly  $\mathbf{T}$ -coercive.

Then (iii)  $\implies$  (ii)  $\implies$  (i).

Since it is clear from the context, we omit the indices  $V$  and  $V'$  in the norms, scalar and duality products. We will denote by  $||| \cdot |||$  the operator norm in  $V$ . Also, unless otherwise specified, subsequences are denoted with the same notation as the sequences they are extracted from.

*Proof.* We prove each assertion in turn.

(iii)  $\implies$  (ii) Let  $v \in V \setminus \{0\}$ :  $\mathbf{T}^{-1}$  is continuous, so we know that  $\|v\| \leq |||\mathbf{T}^{-1}||| \|Tv\|$ . From the weak  $\mathbf{T}$ -coercivity condition (2.9), it follows that

$$\begin{aligned} \sup_{w \in V \setminus \{0\}} \frac{|a(v, w)|}{\|w\|} &\geq \underline{\alpha} \frac{\|v\|^2}{\|Tv\|} - \underline{\beta} \frac{\|Cv\|^2}{\|Tv\|}, \quad \underline{\alpha} > 0, \underline{\beta} \in \mathbb{R} \\ &\geq \frac{\underline{\alpha}}{|||\mathbf{T}|||} \|v\| - |\underline{\beta}| |||\mathbf{C}||| |||\mathbf{T}^{-1}||| \|Cv\|, \end{aligned}$$

that is (2.8), with  $\alpha' = \underline{\alpha}/|||\mathbf{T}|||$  and  $\beta' = |\underline{\beta}| |||\mathbf{C}||| |||\mathbf{T}^{-1}|||$ .

To address the case of the form  $a^\dagger : (v, w) \mapsto \overline{a(w, v)}$ , we remark that as  $\mathbf{T}$  is a bijective operator, one has using (2.9),

$$\forall v \in V, |a^\dagger(v, \mathbf{T}^{-1}v)| = |a(\mathbf{T}^{-1}v, v)| \geq \underline{\alpha} \|\mathbf{T}^{-1}v\|^2 - \underline{\beta} \|C(\mathbf{T}^{-1}v)\|^2 \geq \frac{\underline{\alpha}}{|||\mathbf{T}|||^2} \|v\|^2 - \underline{\beta} \|(C \circ \mathbf{T}^{-1})v\|^2.$$

The operator  $C \circ \mathbf{T}^{-1}$  being compact,  $a^\dagger$  is weakly  $\mathbf{T}$ -coercive, so it satisfies a weak stability condition (replace  $a$  by  $a^\dagger$  above).

(ii)  $\implies$  (i) The weak stability condition (2.8) on the form  $a$  implies

$$\exists \alpha' > 0, \beta' \geq 0, \forall v \in V, \alpha' \|v\| \leq \|Av\|_{V'} + \beta' \|Cv\|. \quad (2.23)$$

We focus below on the case where  $\beta' > 0$  (the case  $\beta' \leq 0$  is more elementary).

Let us prove first that  $R(A)$  is closed in  $V'$ . Let  $(z_k)_k \in (R(A))^{\mathbb{N}}$  be such that  $(z_k)_k$  converges to some  $z \in V'$ : our aim is to show that  $z \in R(A)$ . Note that for all  $k$ , there exists one and only one  $v_k \in (\ker(A))^\perp$  such that  $z_k = Av_k$ . Let us check that  $(v_k)_k$  is bounded by contradiction.

If this is not the case, then there exists a subsequence of non-zero elements  $(v_k)_k$  such that  $\|v_k\| \rightarrow \infty$ . Let  $w_k := v_k/\|v_k\|$  for all  $k$  then, by construction,  $\|Aw_k\|_{V'} \rightarrow 0$  because  $(Av_k)_k$  is bounded. On the other hand,  $C$  is a compact operator and  $\|w_k\| = 1$  for all  $k$ , so that there exists a subsequence  $(w_k)_k$  and  $c \in V$  such that  $Cw_k \rightarrow c$  in  $V$ . Denoting by  $w_{k\ell} := w_k - w_\ell$  and using (2.23), we find

$$\alpha' \|w_{k\ell}\| \leq \|Aw_{k\ell}\|_{V'} + \beta' \|Cw_{k\ell}\| \rightarrow 0 \text{ as } k, \ell \rightarrow \infty.$$

Hence  $(w_k)_k$  is a Cauchy sequence in  $V$ , so it converges to some  $w \in V$ . As we know that  $\|Aw_k\|_{V'} \rightarrow 0$ , we find  $w \in \ker(A)$ . Also,  $w_k \in (\ker(A))^\perp$  for all  $k$ , so  $w \in (\ker(A))^\perp$ . We find

that  $w = \ker(A) \cap (\ker(A))^\perp$ , ie.  $w = 0$ . But  $\|w_k\| = 1$  for all  $k$ , so we have indeed reached a contradiction.

Therefore, the sequence  $(v_k)_k$  is bounded. There exists  $c' \in V$  and a subsequence  $(v_k)_k$ , such that  $\mathbf{C}v_k \rightarrow c'$  in  $V$ . Using (2.23) again with  $v_{k\ell} := v_k - v_\ell$ ,

$$\alpha' \|v_{k\ell}\| \leq \|Av_{k\ell}\|_{V'} + \beta' \|\mathbf{C}v_{k\ell}\| \rightarrow 0 \text{ as } k, \ell \rightarrow \infty.$$

Hence  $(v_k)_k$  converges in  $V$  to some  $v \in V$ , and we find that  $Av_k \rightarrow Av$  in  $V'$ , so  $z = Av \in R(A)$  and  $R(A)$  is closed in  $V'$ .

Next, let  $(v_k)_k$  be a sequence in  $K := \{v \in \ker(A) : \|v\| \leq 1\}$ . Since  $\mathbf{C}$  is a compact operator, there exists a subsequence such that  $(\mathbf{C}v_k)_k$  converges. The relation  $\alpha' \|v_{k\ell}\| \leq \beta' \|\mathbf{C}v_{k\ell}\|$  implies that  $(v_k)_k$  is a Cauchy sequence, so it converges in  $K$ :  $K$  is a compact subset of  $V$ , ie.  $\dim(\ker(A)) < \infty$ .

Likewise, the weak stability condition (2.8) on the form  $a^\dagger$  implies that  $R(A^\dagger)$  is closed in  $V'$  and that  $\dim(\ker(A^\dagger)) < \infty$ .

Finally, denote by  $I_{V' \rightarrow V}$  the canonical isometry from  $V'$  to  $V$ , defined by  $\langle z, v \rangle = (I_{V' \rightarrow V}z, v)$  for all  $v \in V, z \in V'$ . As  $R(A)$  is closed in  $V'$ , it follows that  $Y := I_{V' \rightarrow V}(R(A))$  is closed in  $V$ . Also, one easily checks that the orthogonal vector space of  $Y$  in  $V$  is equal to  $\ker(A^\dagger)$ , so we conclude that  $\text{codim}(R(A)) = \text{codim}(Y) < \infty$ . Similarly,  $\text{codim}(R(A^\dagger)) < \infty$ .  $\square$

**Theorem 2.1.** *Let  $a(\cdot, \cdot)$  be a continuous, hermitian sesquilinear form over  $V \times V$ . Then the three assertions below are equivalent:*

- (i) *problem (2.2) is well-posed in the Fredholm sense;*
- (ii) *the form  $a$  satisfies a weak stability condition;*
- (iii) *the form  $a$  is weakly T-coercive.*

*Proof.* We provide a circular proof below.

(iii)  $\Rightarrow$  (ii) See proposition 2.6.

(ii)  $\Rightarrow$  (i) See proposition 2.6.

(i)  $\Rightarrow$  (iii) As  $R(A)$  is closed in  $V'$  and as the form  $a$  is hermitian, we have as above

$$V = Y \oplus^\perp \ker(A), \text{ with } Y := I_{V' \rightarrow V}(R(A)).$$

Then, we define the operator  $\mathbf{T} := P_{\ker(A)} + I_{V' \rightarrow V} \circ A$  of  $V$ , where  $P_{\ker(A)}$  is the orthogonal projection over  $\ker(A)$ . Observe that, by construction, for all  $v \in V$ ,  $(P_{\ker(A)}v, I_{V' \rightarrow V}(Av)) = 0$ . Given  $v \in V$ ,  $\mathbf{T}v = 0$  implies by orthogonality  $P_{\ker(A)}v = 0$  and  $I_{V' \rightarrow V}(Av) = 0$ , ie.  $P_{\ker(A)}v = 0$  and  $Av = 0$ . Hence  $v = 0$ , and  $\mathbf{T}$  is injective.

Let  $w \in V$  be split as  $w = w_0 + w_Y$ , with  $(w_0, w_Y) \in \ker(A) \times Y$ . By construction, there exists  $v \in V$  such that  $w_Y = I_{V' \rightarrow V}(Av)$ . If we let  $v' := w_0 - P_{\ker(A)}v + v$ , then  $\mathbf{T}v' = w_0 + I_{V' \rightarrow V}(Av) = w_0 + w_Y = w$ . The operator  $\mathbf{T}$  is bijective. In particular, for all  $v \in V$ ,  $\|\mathbf{T}v\| \geq \|v\| / \|\mathbf{T}^{-1}\|$ .

Let us finally derive the condition (2.9) for  $\mathbf{T}$ : given  $v \in V$ , it is split as  $v = v_0 + v_Y$  with  $(v_0, v_Y) \in \ker(A) \times Y$ , and

$$a(v, \mathbf{T}v) = a(v, \mathbf{T}v_0) + a(v, \mathbf{T}v_Y) = a(v, v_0) + a(v, \mathbf{T}v_Y).$$

Since the form  $a$  is hermitian, the first term vanishes:  $a(v, v_0) = a(v_0, v) = 0$ . Regarding the second term, one finds

$$a(v, \mathbf{T}v_Y) = \langle Av, \mathbf{T}v_Y \rangle = \langle Av_Y, \mathbf{T}v_Y \rangle = (I_{V' \rightarrow V}(Av_Y), \mathbf{T}v_Y) = (\mathbf{T}v_Y, \mathbf{T}v_Y) = \|\mathbf{T}v_Y\|^2.$$

Again by orthogonality, one has  $\|\mathbf{T}v\|^2 = \|\mathbf{T}v_0\|^2 + \|\mathbf{T}v_Y\|^2$ , thus

$$a(v, \mathbf{T}v_Y) = \|\mathbf{T}v\|^2 - \|\mathbf{T}v_0\|^2 = \|\mathbf{T}v\|^2 - \|P_{\ker(A)}v_0\|^2 \geq \frac{1}{\|\mathbf{T}^{-1}\|^2} \|v\|^2 - \|P_{\ker(A)}v_0\|^2,$$

which proves the claim with  $\underline{\alpha} = 1/\|\mathbf{T}^{-1}\|^2 > 0$  and  $\mathbf{C} = P_{\ker(A)}$  the compact operator. □



ON THE USE OF PERFECTLY MATCHED  
 LAYERS AT CORNERS FOR SCATTERING  
 PROBLEMS WITH SIGN-CHANGING  
 COEFFICIENTS

Ce chapitre fait l'objet d'une publication (cf. [12]). Quelques extensions et remarques sont présentées en section 3.A (qui ne sont pas dans l'article). Tout le chapitre est rédigé en anglais.

**Contents**

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>66</b>
<b>3.2</b>	<b>Setting of the problem</b>	<b>68</b>
3.2.1	The scattering problem with sign-changing permittivity	68
3.2.2	Reduction to a bounded domain and description of the geometry	69
3.2.3	Well-posedness in the classical framework for a contrast outside the critical interval	70
<b>3.3</b>	<b>Singular solutions at one corner</b>	<b>72</b>
3.3.1	Characterization of singular exponents	72
3.3.2	Oscillating singularities	74
3.3.3	Selecting the outgoing solution I: energy trapped at the corner	76
3.3.4	Selecting the outgoing solution II: limiting absorption principle	78
3.3.5	A well-posed formulation of the scattering problem for a contrast inside the critical interval	78
<b>3.4</b>	<b>Approximation of the solution for a contrast inside the critical interval</b>	<b>80</b>
3.4.1	Analogy with a waveguide problem	81
3.4.2	A new formulation of the scattering problem	82
3.4.3	Numerical approximation	84
3.4.4	Numerical experiments	86

<b>3.5</b>	<b>Discussion and prospects</b>	<b>88</b>
<b>3.6</b>	<b>Annex</b>	<b>90</b>
3.6.1	Proof of Proposition 3.2	90
3.6.2	Proof of Lemma 3.4	91
3.6.3	Details of the proof of Lemma 3.3	91
<b>3.A</b>	<b>Some extensions</b>	<b>92</b>
3.A.1	A more general proof of proposition 3.3	92
3.A.2	The particularity of the electrostatic like case	94

**Abstract:** We investigate in a 2D setting the scattering of time-harmonic electromagnetic waves by a plasmonic device, represented as a non dissipative bounded and penetrable obstacle with a negative permittivity. Using the T-coercivity approach, we first prove that the problem is well-posed in the classical framework  $H_{\text{loc}}^1$  if the negative permittivity does not lie in some critical interval whose definition depends on the shape of the device. When the latter has corners, for values inside the critical interval, unusual strong singularities for the electromagnetic field can appear. In that case, well-posedness is obtained by imposing a radiation condition at the corners to select the outgoing black-hole plasmonic wave, that is the one which carries energy towards the corners. A simple and systematic criterion is given to define what is the outgoing solution. Finally, we propose an original numerical method based on the use of Perfectly Matched Layers at the corners. We emphasize that it is necessary to design an *ad hoc* technique because the field is too singular to be captured with standard finite element methods.

**Keywords:** Scattering problem, sign-changing permittivity, corner singularities, black-hole waves, Perfectly Matched Layers.

## 3.1 Introduction

We are interested in the scattering of Transverse Magnetic (TM) time-harmonic electromagnetic waves by a metallic obstacle embedded in some dielectric medium, governed by the following scalar equation

$$\operatorname{div}(\varepsilon^{-1}\nabla u) + \omega^2\mu u = 0, \quad (3.1)$$

where  $\omega$  is the frequency,  $\varepsilon$  is the dielectric permittivity and  $\mu$  is the magnetic permeability. Unlike common materials, metals can exhibit a permittivity with a negative real part. More precisely, following the Drude's law (see e.g. [1]) the permittivity depends on the frequency:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0\varepsilon_r(\omega) = \varepsilon_0 \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\omega\gamma} \right). \quad (3.2)$$

Here,  $\varepsilon_0 > 0$  is the vacuum permittivity,  $\varepsilon_r(\omega)$  is called the relative permittivity,  $\gamma > 0$  characterizes the dissipative effects (we choose the convention of a harmonic regime in  $e^{-i\omega t}$ ), and  $\omega_p > 0$  is the plasma frequency. Since  $\gamma \ll \omega_p$ , dissipation becomes neglectable at frequencies  $\omega$  such that  $\omega \gg \gamma$ , leading to the so-called dissipationless Drude's model:

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \quad (3.3)$$

Then for  $\omega < \omega_p$ ,  $\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0\varepsilon_r(\omega)$  takes negative real values. Due to the change of sign of the dielectric constant at the interface metal-dielectric, resonances called surface plasmons can appear [96, 118]. Over the past decades, surface plasmons revealed a great interest in guiding or confining light in nano-photonic devices [5, 69, 135].

From a mathematical point of view, the study of Equation (3.1) with a function  $\varepsilon$  changing sign on the physical domain, has given rise to many contributions. In particular, an abstract mathematical approach named T-coercivity and based on variational methods has been proposed in [22, 15]. With this technique, it has been proved that Problem (3.1) set in a bounded domain supplemented with Dirichlet (or Neumann) boundary condition is of Fredholm type in the classical functional framework whenever the contrast (ratio of the values of  $\varepsilon$  across the interface) lies outside some interval  $I_c$ , called critical interval, which always contains the value  $-1$ . Moreover, this interval reduces to  $\{-1\}$  if and only if the interface between the two materials is smooth (of class  $\mathcal{C}^2$ ). Analogous results have been obtained by techniques of boundary integral equations long time before in [54] (see also [108, 89]). Note that the critical value  $-1$  is associated through Equation (3.3) to the so-called surface plasmon frequency while the critical interval is associated to a critical range of frequencies. The numerical approximation of the solution of this scalar problem for a contrast outside the critical interval, based on classical finite element methods, has been investigated in [22, 105, 40]. Under some assumptions on the meshes, the discretized problem is well-posed and its solution converges to the solution of the continuous problem. Let us mention that the study of Maxwell's equations has been carried out in [17, 16, 30].

For geometries with wedges and sharp corners, the solution exhibits strong singularities at these regions when the contrast is getting closer to the critical interval. This leads to a local energy enhancement of the light [125, 10, 107]. Even more, for a contrast inside the critical interval, the problem becomes ill-posed in the classical framework because the solution is no longer in  $H^1$ . Up to now, mathematical analysis have addressed in 2D the simplified electrostatic like equation

$$\operatorname{div}(\varepsilon^{-1}(\omega)\nabla u) = 0, \quad (3.4)$$

which can be seen as an approximation of (3.1) by zooming at a corner. It is interesting to note that the critical interval also appears in the studies of (3.4) with techniques of conformal mappings [2, 92, 63]. Concerning the mathematical framework, the influence of corners at the interface between the two materials has been clarified in [18] for equation (3.4) set in a particular geometry (with one corner of particular aperture). In that case, when the contrast lies inside the critical interval, Fredholm property is lost because of the existence of two strongly oscillating singularities at the corner, responsible for the ill-posedness in the classical framework. These singularities can be interpreted as waves propagating towards or outwards the corner. Then selecting the outgoing singularity by means of a limiting absorption principle allows to recover Fredholmness of the problem.

The first goal of the present paper is to extend the theory to a more realistic scattering problem in free space, for a contrast of permittivities outside or inside  $I_c$ . The second objective is to present an original numerical method to approximate the solution when the contrast lies inside the critical interval. The approach, based on a finite element method, consists in using well-suited Perfectly Matched Layers (PMLs) at the corners to capture the strongly oscillating singularities.

This text is organized as follows. In section 3.2, we define the problem and introduce an equivalent formulation set in a bounded domain using a classical Dirichlet-to-Neumann operator. Then for a contrast outside the critical interval, we prove it has a unique solution using the T-coercivity approach. In the rest of the paper, we consider the case of a contrast inside the critical interval. In section 3.3, we provide a detailed description of the singularities at corners. In particular, we give a systematic criterion to select the outgoing singularity which has to be taken into account through an adequate radiation condition at the corner. This condition yields a well-posed problem for a contrast inside the critical interval. Standard finite element methods fail to approximate the solution in the new framework because it is too singular. In section 3.4, we introduce an original numerical method to

solve this problem. The idea is to use a coordinates transformation which maps a small disk around corners to semi-infinite strips. Then we implement Perfectly Matched Layers in the semi-infinite strips. We illustrate the method showing numerical results in the case of a triangular silver inclusion embedded in vacuum. Finally in section 3.5, we conclude the paper with further discussions.

## 3.2 Setting of the problem

### 3.2.1 The scattering problem with sign-changing permittivity

Propagation of time-harmonic electromagnetic waves in an inhomogeneous, isotropic, and lossless medium is described by Maxwell's equations  $i\omega\varepsilon\mathbf{E} + \mathbf{curl}\mathbf{H} = 0$  and  $-i\omega\mu\mathbf{H} + \mathbf{curl}\mathbf{E} = 0$  for all  $(\mathbf{x}, z) = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Here,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  correspond respectively to the electric and magnetic fields while  $\varepsilon$ ,  $\mu$  are the dielectric permittivity and magnetic permeability. Introduce  $\Omega_m$  a bounded open set of  $\mathbb{R}^2$  with Lipschitz boundary  $\Sigma := \partial\Omega_m$  and define  $\Omega_d := \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega_m}$  (see Figure 3.1). In this notation, the subscripts  $_m$  and  $_d$  stand for “metal” and “dielectric” respectively. We assume that the real-valued functions  $\varepsilon$ ,  $\mu$  verify  $\varepsilon := \varepsilon_r\varepsilon_0$ ,  $\mu := \mu_r\mu_0$  with

$$\varepsilon_r = \begin{cases} \varepsilon_d > 0 & \text{in } \Omega_d \times \mathbb{R} \\ \varepsilon_m(\omega) < 0 & \text{in } \Omega_m \times \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{and} \quad \mu_r = \begin{cases} \mu_d > 0 & \text{in } \Omega_d \times \mathbb{R} \\ \mu_m > 0 & \text{in } \Omega_m \times \mathbb{R} \end{cases},$$

where  $\varepsilon_m(\omega)$  follows the dissipationless Drude's model (3.3), and  $\varepsilon_d$ ,  $\mu_d$ ,  $\mu_m$  are three positive constants. Here  $\varepsilon_0 > 0$  (resp.  $\mu_0 > 0$ ) refers to the vacuum permittivity (resp. permeability). If an incident field  $u^{\text{inc}}$  independent of the variable  $z$  illuminates the obstacle, for instance  $u^{\text{inc}}(\mathbf{x}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$  with  $|\mathbf{k}| = k := \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\sqrt{\varepsilon_d\mu_d}$ , one can classically reduce the study of Maxwell's equations to the resolution of two uncoupled 2D scalar problems: one associated with  $(H_x, H_y, E_z)$  called the Transverse Electric problem (TE), another associated with  $(E_x, E_y, H_z)$  called the Transverse Magnetic problem (TM). In particular for the TM problem,  $H_z$ , denoted by  $u$  in the following, is a solution of the problem

$$\left| \begin{array}{l} \text{Find } u = u^{\text{inc}} + u^{\text{sca}} \text{ such that:} \\ \text{div}(\varepsilon_r^{-1}\nabla u) + \omega^2 c^{-2}\mu_r u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \\ \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \int_{|\mathbf{x}|=\xi} \left| \frac{\partial u^{\text{sca}}}{\partial r} - iku^{\text{sca}} \right|^2 d\sigma = 0, \end{array} \right. \quad (3.5)$$

where  $c := (\sqrt{\varepsilon_0\mu_0})^{-1}$  denotes the light speed. In (3.5) the incident field  $u^{\text{inc}}$  is the data defined above, the total field  $u$  is the unknown and  $u^{\text{sca}} := u - u^{\text{inc}}$  is the field scattered by the metallic inclusion. The second equation in (3.5) is the Sommerfeld radiation condition which ensures that  $u^{\text{sca}}$  is outgoing at infinity ( $r$  is the radial coordinate). Here and in the following, we use the same notation for  $\varepsilon_r$ ,  $\mu_r$  considered as functions defined on  $\mathbb{R}^2$  or  $\mathbb{R}^3$ . We emphasize that the study of Problem (3.5) is not standard because  $\varepsilon_r$  is sign-changing.

For the rest of the paper, the index  $r$  for the parameters  $\varepsilon_r$ ,  $\mu_r$  is omitted and we define  $k_0 := \omega/c$ . We fix the frequency  $\omega$  and we write  $\varepsilon_m$  instead of  $\varepsilon_m(\omega)$ . Then Problem (3.5) can be rewritten as

$$\left| \begin{array}{l} \text{Find } u = u^{\text{inc}} + u^{\text{sca}} \text{ such that:} \\ \text{div}(\varepsilon^{-1}\nabla u) + k_0^2\mu u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \\ \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \int_{|\mathbf{x}|=\xi} \left| \frac{\partial u^{\text{sca}}}{\partial r} - iku^{\text{sca}} \right|^2 d\sigma = 0. \end{array} \right. \quad (3.6)$$



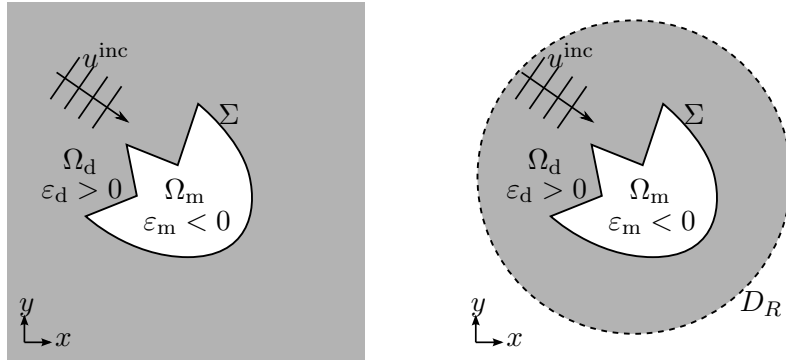


Figure 3.1: Left: scattering problem in free space. Right: scattering problem in the artificially bounded domain  $D_R$ .

### 3.2.2 Reduction to a bounded domain and description of the geometry

In order to study Problem (3.6) as it is usual in the analysis of scattering problems in free space, we first introduce an equivalent formulation set in a bounded domain. Let  $D_R := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid |\mathbf{x}| < R\}$  denote the open disk of radius  $R$ . We take  $R$  large enough so that  $\overline{\Omega_m} \subset D_R$ . Classically (work e.g. as in [33, Lemma 5.22]) one proves that  $u$  is a solution of (3.6) if and only if it satisfies the problem

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\varepsilon^{-1} \nabla u) + k_0^2 \mu u = 0 & \text{in } D_R \\ \frac{\partial u}{\partial r} = \mathcal{S}u + g^{\text{inc}} & \text{on } \partial D_R, \end{cases} \quad \text{where } g^{\text{inc}} := \frac{\partial u^{\text{inc}}}{\partial r} - \mathcal{S}u^{\text{inc}}. \quad (3.7)$$

Here,  $(r, \theta)$  stand for the polar coordinates centered at  $O$ , the center of  $D_R$ , while  $\mathcal{S}$  refers to the so-called Dirichlet-to-Neumann map. The action of  $\mathcal{S}$  can be described decomposing  $u$  in Fourier series (see [33, Theorem 5.20]):

$$\mathcal{S}u(R, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n \frac{k H_n^{(1)'}(kR)}{H_n^{(1)}(kR)} \frac{e^{in\theta}}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{with} \quad u_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} u(R, \theta) e^{-in\theta} d\theta. \quad (3.8)$$

In this expression,  $H_n^{(1)}$  denotes the Hankel function of first kind and  $H_n^{(1)'}$  its derivative.

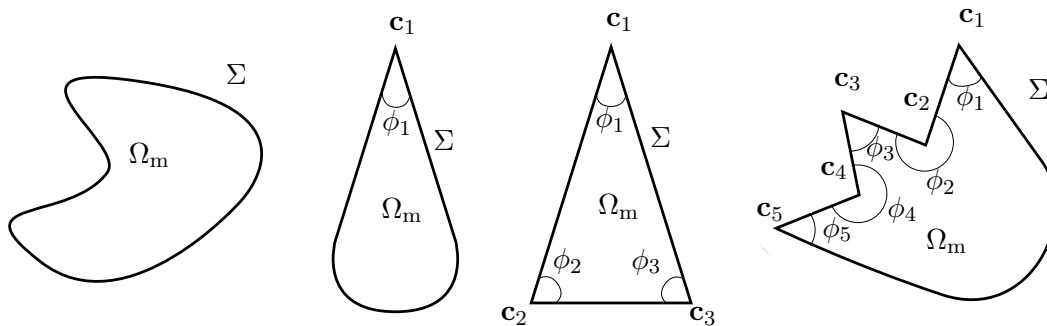


Figure 3.2: Examples of geometries. From left to right: a smooth inclusion ( $N = 0$ ), a droplet ( $N = 1$ ), a triangle ( $N = 3$ ) and a more complicated inclusion ( $N = 5$ ).

We have already mentioned that the geometrical features of the interface  $\Sigma = \partial\Omega_m$  play a key role in the results of well-posedness for problems with sign-changing coefficients. In particular, one has to

distinguish when the contrast  $\kappa_\varepsilon := \varepsilon_m/\varepsilon_d$  is outside or inside the critical interval  $I_c$ . In order to define this interval, we start by describing the geometry precisely, introducing *ad hoc* notations. We assume that  $\Sigma$  is of class  $\mathcal{C}^2$  at any  $\mathbf{x} \in \Sigma$ , except at a finite (possibly empty) set of vertices  $\mathbf{c}_n$ ,  $n = 1, \dots, N$ . We assume that in a neighbourhood of each vertex  $\mathbf{c}_n$ ,  $\Omega_m$  coincides with a sector of aperture  $\phi_n$  (see an illustration with Figure 3.2). Set

$$b_\Sigma := \begin{cases} \max_{n=1, \dots, N} \left( \frac{2\pi - \phi_n}{\phi_n}, \frac{\phi_n}{2\pi - \phi_n} \right) & \text{if } \Sigma \text{ has corners } (N \geq 1) \\ 1 & \text{if } \Sigma \text{ is smooth } (N = 0). \end{cases} \quad (3.9)$$

Finally, we define the critical interval  $I_c$  by:

$$I_c := [-b_\Sigma; -1/b_\Sigma]. \quad (3.10)$$

Details about the derivation of (3.10) will be given in section 3.3. Note that the critical interval  $I_c \subset (-\infty; 0)$  always contains the value  $-1$  (because  $b_\Sigma \geq 1$ ) and that there holds  $I_c = \{-1\}$  if and only if  $\Sigma$  is smooth ( $N = 0$ ). If  $N \geq 1$ , denoting  $\phi_{\min} := \min_{n=1, \dots, N}(\phi_n, 2\pi - \phi_n)$ , we can write  $b_\Sigma = (2\pi - \phi_{\min})/\phi_{\min}$ . This shows that the critical interval  $I_c$  is determined by the aperture of the sharpest angle of the interface. Observe that if  $\phi_{\min} \rightarrow 0$ , then  $I_c \rightarrow (-\infty; 0)$ .

Before studying well-posedness of Problem (3.7), let us finish this section by some comments. Previous studies for problems with sign-changing coefficients have shown that the adapted functional framework is  $H^1$  when the contrast  $\kappa_\varepsilon$  is outside  $I_c$ , while the solution becomes too singular to belong to  $H^1$  when  $\kappa_\varepsilon \in I_c$  [15, 18]. This will remain true for our scattering problem, and it will have a significant impact on the energy balance. Indeed, when the solution  $u$  of Problem (3.7) is in  $H^1(D_R)$ , a simple integration by parts yields:

$$\varepsilon_d^{-1} \int_{\partial D_R} \frac{\partial u}{\partial r} \bar{u} d\sigma = \int_{D_R} \varepsilon^{-1} |\nabla u|^2 d\mathbf{x} - k_0^2 \int_{D_R} \mu |u|^2 d\mathbf{x}. \quad (3.11)$$

Taking the imaginary part of (3.11) since  $\varepsilon$  and  $\mu$  are real valued, we obtain the assertion:

$$“u \in H^1(D_R) \text{ solution of Problem (3.7)}” \implies \Im m \left( \int_{\partial D_R} \frac{\partial u}{\partial r} \bar{u} d\sigma \right) = 0. \quad (3.12)$$

This means that the energy flux through  $\partial D_R$ , in fact through any curve enclosing the obstacle, is equal to 0 (which seems natural because the medium is non dissipative). We will see in section 3.3 that this property is not satisfied when  $\kappa_\varepsilon \in I_c$ . In this situation, some energy is trapped by the corners.

### 3.2.3 Well-posedness in the classical framework for a contrast outside the critical interval

In this section we explain how to show that Problem (3.7) is well-posed in the usual functional framework  $H^1(D_R)$  when  $\kappa_\varepsilon \notin I_c$ . The variational formulation of Problem (3.7) writes:

$$\left| \begin{array}{l} \text{Find } u \in H^1(D_R) \text{ such that:} \\ a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in H^1(D_R), \end{array} \right. \quad (3.13)$$

$$\text{with } a(u, v) = \int_{D_R} \varepsilon^{-1} \nabla u \cdot \overline{\nabla v} d\mathbf{x} - k_0^2 \int_{D_R} \mu u \bar{v} d\mathbf{x} - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{k}{\varepsilon_d} \frac{H_n^{(1)'}(kR)}{H_n^{(1)}(kR)} u_n \bar{v}_n, \quad l(v) = \int_{\partial D_R} \frac{g^{\text{inc}}}{\varepsilon_d} \bar{v} d\sigma.$$

If  $u \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^2)$  is a solution of the original Problem (3.6), then its restriction to  $D_R$  satisfies (3.13). Conversely if  $u$  verifies (3.13) then it can be extended as a solution of (3.6) in  $H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^2)$ .

**Lemma 3.1.** *Problem (3.6) has at most one solution in  $H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^2)$ .*

*Proof.* We proceed exactly as when  $\varepsilon$  has a constant sign. By linearity of the problem, we just have to show that a solution  $u \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^2)$  of (3.6) with  $u^{\text{inc}} = 0$  vanishes. For  $\xi \geq R$ , there holds

$$\int_{\partial D_\xi} \left| \frac{\partial u}{\partial r} - iku \right|^2 d\sigma = \int_{\partial D_\xi} \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|^2 d\sigma + k^2 \int_{\partial D_\xi} |u|^2 d\sigma - 2k\Im m \left( \int_{\partial D_\xi} \frac{\partial u}{\partial r} \bar{u} d\sigma \right), \quad (3.14)$$

where  $D_\xi = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid |\mathbf{x}| < \xi\}$ . Then using (3.12) (which is also valid with  $R$  replaced by any  $\xi \geq R$ ) and the Sommerfeld radiation condition, we obtain

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \int_{\partial D_\xi} |u|^2 d\sigma = 0.$$

Since  $u$  satisfies  $\Delta u + k_0^2 \mu_d \varepsilon_d u = 0$  in  $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D_R}$ , Rellich's lemma (see e.g. [33, Theorem 3.5]) guarantees that  $u = 0$  in  $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D_R}$ . From Holmgren's theorem [76, Theorem 8.6.5], working as in the end of the proof of [33, Lemma 5.23], successively we deduce that  $u = 0$  in  $\Omega_d$  and  $u = 0$  in  $\Omega_m$ .  $\square$

Lemma 3.1 ensures in particular that a metallic inclusion in the free space cannot trap a pure resonant wave. Now let us prove the main result for Problem (3.6) outside the critical interval.

**Proposition 3.1.** *Let  $\omega > 0$  be a given frequency. Assume that the contrast  $\kappa_\varepsilon = \varepsilon_m/\varepsilon_d$  verifies  $\kappa_\varepsilon \notin I_c = [-b_\Sigma; -1/b_\Sigma]$ , where  $b_\Sigma$  has been defined in (3.9). Then Problem (3.6) has a unique solution  $u$  in  $H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^2)$ . Moreover there exists  $C > 0$  independent of the data  $g^{\text{inc}}$  such that*

$$\|u\|_{H^1(D_R)} \leq C \|g^{\text{inc}}\|_{L^2(\partial D_R)}.$$

*Proof.* Let us decompose the bilinear form  $a(\cdot, \cdot)$  of the variational formulation (3.13) as follows:

$$\begin{aligned} \forall v, w \in H^1(D_R), \quad a(v, w) &= b(v, w) + c(v, w), \\ \text{with} \quad b(v, w) &= \int_{D_R} \varepsilon^{-1} \nabla v \cdot \overline{\nabla w} d\mathbf{x} + \int_{D_R} v \overline{w} d\mathbf{x} + \varepsilon_d^{-1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{n}{R} v_n \overline{w_n}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

$v_n, w_n$  being defined as in (3.8) (one deduces  $c(\cdot, \cdot)$  from above). With the Riesz representation theorem, we introduce the maps  $\mathcal{B} : H^1(D_R) \rightarrow H^1(D_R)$ ,  $\mathcal{C} : H^1(D_R) \rightarrow H^1(D_R)$  as well as the function  $f \in H^1(D_R)$  such that

$$(\mathcal{B}v, w)_{H^1(D_R)} = b(v, w), \quad (\mathcal{C}v, w)_{H^1(D_R)} = c(v, w), \quad (f, w)_{H^1(D_R)} = l(w), \quad \forall v, w \in H^1(D_R).$$

With these notations,  $u$  is a solution of (3.13) if and only if it verifies  $\mathcal{B}u + \mathcal{C}u = f$ . Using classical results concerning the Dirichlet-to-Neumann map  $\mathcal{S}$ , following e.g. [33, theorem 5.20], one can prove that  $\mathcal{C}$  is a compact operator. Therefore it is sufficient to show that  $\mathcal{B}$  is Fredholm to conclude.

In the classical case of a positive  $\varepsilon$ , one obtains easily the result using the Lax-Milgram theorem. Here, because of the change of sign of  $\varepsilon$  in  $D_R$ ,  $b(\cdot, \cdot)$  is not coercive and this technique fails. Instead, we use the T-coercivity approach. More precisely, when  $\kappa_\varepsilon \notin I_c$ , we can prove the existence of a bounded operator  $\mathbf{T} : H^1(D_R) \rightarrow H^1(D_R)$  such that

$$|b(u, \mathbf{T}u)| \geq C_0 \|u\|_{H^1(D_R)}^2 - C'_0 \|u\|_{L^2(D_R)}^2, \quad \forall u \in H^1(D_R), \quad (3.16)$$

where  $C_0 > 0$ ,  $C'_0 \in \mathbb{R}$  are some constants independent of  $u$ . According to some classical results (see [113]) of functional analysis, this is enough to conclude that  $\mathcal{B}$  is a Fredholm operator. In this method,

all the work lies in the construction of  $\mathbf{T}$ . Let us briefly explain how we proceed. For details, we refer the reader to [15, 13]. For all  $u \in H^1(D_R)$ , set

$$\mathbf{T}u = \text{sign}(\varepsilon)u + R_{\text{loc}}(u), \quad (3.17)$$

where  $R_{\text{loc}} : H^1(D_R) \rightarrow H^1(D_R \setminus \Sigma)$  is a continuous operator. The term  $\text{sign}(\varepsilon)u$  is natural to annihilate the change of sign of  $\varepsilon$  across the interface  $\Sigma$ . Unfortunately, in the general case,  $\text{sign}(\varepsilon)u$  has a jump across  $\Sigma$ . The map  $R_{\text{loc}}$  allows to offset this jump. It is chosen so that  $[R_{\text{loc}}(u)]_{\Sigma} = 2u|_{\Sigma}$ , for all  $u \in H^1(D_R)$ , where  $[\cdot]_{\Sigma}$  denotes the jump from  $\Omega_{\text{m}}$  to  $\Omega_{\text{d}}$ . Using cut-off functions, which are responsible for the appearance of the second term in the left-hand side of (3.16), we can define  $R_{\text{loc}}$  such that  $R_{\text{loc}}(u)|_{\partial D_R} = 0$ . Thus,  $\mathbf{T}u$  does not modify boundary term contributions in (3.15). We emphasize that in the vicinity of  $\Sigma$  the operator  $R_{\text{loc}}$  has to be carefully defined (see again [15, 13] for details). With (3.17) plugged into (3.15), Estimate (3.16) follows.  $\square$

Let us make some comments regarding this approach:

- The analysis developed here can be adapted to varying coefficients  $\varepsilon, \mu$ . In this case, the condition [15, Theorem 4.3] to guarantee Fredholmness for Problem (3.7) with the  $\mathbf{T}$ -coercivity technique involves the ratio of local upper and lower bounds of  $\varepsilon_{\text{d}}, \varepsilon_{\text{m}}$  in a neighbourhood (which can be chosen as small as we want) of  $\Sigma$ . In order to prove uniqueness of the solution, an additional smoothness assumption on  $\varepsilon$  (imposing e.g.  $\varepsilon$  to be piecewise smooth) has to be made to apply unique continuation results.
- In the (TE) problem, the electric field  $E_z$  satisfies the equation  $\text{div}(\mu^{-1}\nabla E_z) + k_0^2\varepsilon E_z = 0$  in  $\mathbb{R}^2$ . Thus, since  $\mu_{\text{m}} > 0$ , we find that the (TE) problem is always well-posed: the change of sign of  $\varepsilon$  does not matter in the (TE) problem.
- One can also consider sign-changing permeabilities, for example when one wishes to model the propagation of electromagnetic fields in presence of Negative Index Metamaterials (NIM) [114, 124, 1]. Defining the contrast  $\kappa_{\mu} := \mu_{\text{m}}/\mu_{\text{d}}$ , for the (TM) problem, well-posedness holds for  $\kappa_{\varepsilon} \notin I_c$  and for all  $\kappa_{\mu} < 0$ . Also for the (TE) problem, well-posedness is guaranteed for all  $\kappa_{\varepsilon} < 0$  when  $\kappa_{\mu} \notin I_c$ .

### 3.3 Singular solutions at one corner

When the interface between the two materials presents corners, then for a contrast  $\kappa_{\varepsilon}$  inside the critical interval  $I_c$ , well-posedness of Problem (3.6) in the usual  $H^1$  framework is lost. This is due to the appearance of strongly oscillating singularities at one or several corner(s). This has been already investigated in [56, 18, 41] for a particular geometry involving one corner of aperture  $\pi/2$ . Here we wish to study the general case of an arbitrary corner angle.

#### 3.3.1 Characterization of singular exponents

For ease of exposition, we consider a metallic inclusion with only one corner, that we denote by  $\mathbf{c}$ . Without loss of generality we assume that  $\mathbf{c}$  is located at the origin  $O$ . In accordance with the setting of §3.2.2,  $\Omega_{\text{m}}$  coincides in the vicinity of the vertex  $\mathbf{c}$  with a sector of aperture  $\phi \in (0; 2\pi) \setminus \{\pi\}$  (see Figure 3.7 left). In other words, there exists  $\rho > 0$  such that for well-chosen cartesian and polar coordinates  $(r, \theta)$ :

$$\begin{aligned} D_{\rho} \cap \Omega_{\text{d}} &= \{\mathbf{x} = (r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \mid 0 < r < \rho, \phi/2 < |\theta| < \pi\}, \\ D_{\rho} \cap \Omega_{\text{m}} &= \{\mathbf{x} = (r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \mid 0 < r < \rho, |\theta| < \phi/2\}, \end{aligned}$$

where  $D_{\rho}$  denotes the disk of radius  $\rho$ . In  $D_{\rho}$ , the permittivity  $\varepsilon$  depends only on  $\theta$ :

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_{\text{m}} & \text{for } |\theta| < \phi/2, \\ \varepsilon_{\text{d}} & \text{for } \phi/2 < |\theta| < \pi. \end{cases}$$

In polar coordinates, equation of Problem (3.6) multiplied by  $r^2$  reads

$$\varepsilon^{-1}(r\partial_r)^2u + \partial_\theta(\varepsilon^{-1}\partial_\theta u) + k_0^2r^2\mu u = 0, \quad (3.18)$$

where we use abusively the same notation for  $u(\mathbf{x})$  and  $u(r, \theta)$ . Zooming at the corner (*i.e.* taking  $\rho$  small enough) leads to neglect the term  $k_0^2r^2\mu u$  in (3.18) and to study the “static” equation (3.4). In other words, the singular behaviour of a solution of (3.18) is the same as the one of a solution of (3.4). The main advantage of considering (3.4) is that separation of variables is now possible. In the following, we call singularities the functions  $s(r, \theta) = \chi(r)\Phi(\theta)$  with separated variables in polar coordinates which satisfy

$$\operatorname{div}(\varepsilon^{-1}\nabla s) = 0 \quad \text{in } D_\rho, \quad (3.19)$$

that is  $\varepsilon^{-1}(r\partial_r)^2s + \partial_\theta(\varepsilon^{-1}\partial_\theta s) = 0$ . A direct calculation shows that this holds if and only if there exists  $\lambda \in \mathbb{C}$  such that  $(r\partial_r)^2\chi = \lambda^2\chi$ , for  $0 < r < \rho$  and

$$\left| \begin{array}{l} -(\partial_\theta \varepsilon^{-1} \partial_\theta) \Phi = \lambda^2 \varepsilon^{-1} \Phi \quad \text{for } -\pi < \theta < \pi, \\ \Phi(-\pi) = \Phi(\pi), \\ \partial_\theta \Phi(-\pi) = \partial_\theta \Phi(\pi). \end{array} \right. \quad (3.20)$$

The problem verified by  $\chi$ , for which we do not impose boundary conditions, can be easily solved. For  $\lambda = 0$ , we find  $\chi(r) = A \ln r + B$  whereas for  $\lambda \neq 0$ , we obtain  $\chi(r) = A r^\lambda + B r^{-\lambda}$ ,  $A, B$  being two constants. The Problem (3.20) satisfied by  $\Phi$  is an eigenvalue problem. Denote by  $\Lambda$  the set of values  $\lambda$  such that Problem (3.20) has a non zero solution  $\Phi$ . This set will be referred to as the set of singular exponents associated to  $\mathbf{c}$ . In the usual case where  $\varepsilon > 0$ , (3.20) is a self-adjoint problem with positive eigenvalues  $\lambda^2$  ( $\Lambda \subset \mathbb{R}$ ). Here, because the sign-changing parameter  $\varepsilon$  appears in both sides of the equation, the study and the properties of (3.20) are not standard. In particular,  $\Lambda$  generally contains complex eigenvalues. Concerning the analysis, to our knowledge there is no theory for this eigenvalue problem. However since it is a 1D problem, we can carry out explicit computations. First we can prove that, when  $\kappa_\varepsilon \neq -1$ ,  $\Lambda$  is discrete (proceed as in [39, Corollary 4.10]). Moreover, it is straightforward to see that  $0 \in \Lambda$  and that  $\Lambda$  is stable by symmetry/conjugation ( $-\lambda, \pm\bar{\lambda} \in \Lambda$  for all  $\lambda \in \Lambda$ ). Using elementary symmetry arguments, one can compute singular exponents associated with even or odd eigenfunctions  $\Phi$ . The corresponding singularities  $s(r, \theta)$  are either symmetric or skew-symmetric with respect to the bisector of the corner  $\ell := \{\mathbf{x} = (r \cos \theta, r \sin \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid \theta = 0\}$  (see Figure 3.7 left). We denote by  $\Lambda_{\text{sym}}$  (resp.  $\Lambda_{\text{skew}}$ ) the subset of  $\Lambda$  of singular exponents corresponding to symmetric (resp. skew-symmetric) singularities. Note that  $\Lambda = \Lambda_{\text{sym}} \cup \Lambda_{\text{skew}}$ . Simple calculations reproduced in Annex 3.6.1 yield the following characterizations for the sets  $\Lambda_{\text{sym}}, \Lambda_{\text{skew}}$ .

**Proposition 3.2.** *Set  $b := (2\pi - \phi)/\phi$  and  $f^\pm(z) = \kappa_\varepsilon^{\pm 1} \tanh(z) + \tanh(bz)$  for  $z \in \mathbb{C}$ . We have*

$$\Lambda_{\text{sym}} := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid f^-(i\lambda\phi/2) = 0\}, \quad \Lambda_{\text{skew}} := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid f^+(i\lambda\phi/2) = 0\}.$$

All singularities do not contribute to the solution of a problem such as (3.6). For instance, for  $\kappa_\varepsilon \notin I_c$ , the solution of (3.6) is locally in  $H^1$ , so that only singularities which are in  $H^1$  near the corner should be considered. For  $\lambda = 0$ ,  $A \ln r + B$  is locally in  $H^1$  if and only if  $A = 0$ . For  $\lambda$  such that  $\Re \lambda > 0$ ,  $s(r, \theta) = r^\lambda \Phi(\theta)$  is locally in  $H^1$  while  $s(r, \theta) = r^{-\lambda} \Phi(\theta)$  is not. The singularities associated with singular exponents  $\lambda$  satisfying  $\lambda \neq 0$  and  $\Re \lambda = 0$  (located at the limit between the  $H^1$  zone and the non  $H^1$  zone) play a special role for Problem (3.6). We will have to take them into account in the functional framework even though they do not belong to  $H^1$  (see (3.21)). In the next paragraph, we focus our attention on these particular singularities.

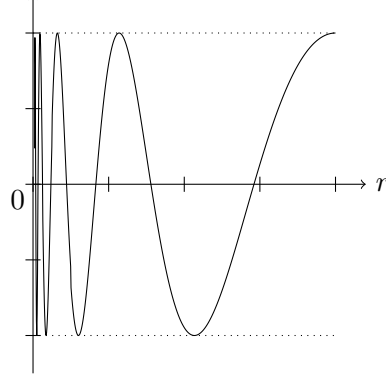


Figure 3.3: Behaviour of the real part of the radial component of the singularity  $r^\lambda \Phi(\theta)$ , for  $\lambda \in \mathbb{R}i \setminus \{0\}$ , in a neighbourhood of  $O$ . To understand these oscillations, observe that  $\Re r^{i\eta} = \cos(\eta \ln r)$  for  $\eta \in \mathbb{R}^*$ .

### 3.3.2 Oscillating singularities

Assume that  $\Lambda \cap i\mathbb{R}$  contains some  $\lambda \neq 0$ . The singularities  $r^{\pm\lambda} \Phi(\theta)$  have a curious oscillating behaviour at the origin (see Figures 3.3, 3.5) and do not belong to  $H^1$ . Indeed, for  $\lambda = i\eta$ ,  $\eta \in \mathbb{R}^*$ , we obtain

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\delta}^{\rho} |\partial_r(r^{i\eta} \Phi(\theta))|^2 r dr d\theta = \lim_{\delta \rightarrow 0} \eta^2 \int_{-\pi}^{\pi} |\Phi(\theta)|^2 d\theta \int_{\delta}^{\rho} \frac{dr}{r} = +\infty. \quad (3.21)$$

Going back to Maxwell's equations, this means that the electric field  $\mathbf{E}$  is such that  $\mathbf{E} \notin (L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^3))^3$ , so that the energy is infinite at the corner. Now, we prove that such singularities exist.

**Lemma 3.2.** Define  $I_c = [-b_\Sigma; -1/b_\Sigma]$  with  $b_\Sigma = \max\left(\frac{2\pi-\phi}{\phi}, \frac{\phi}{2\pi-\phi}\right)$ . The following array describes the set  $\Lambda \cap i\mathbb{R}$  with respect to  $\kappa_\varepsilon, \phi$ :

	$\kappa_\varepsilon \notin I_c$	$\kappa_\varepsilon \in (-b_\Sigma; -1)$	$\kappa_\varepsilon \in (-1; -1/b_\Sigma)$
$0 < \phi < \pi$	$\Lambda \cap i\mathbb{R} = \{0\}$	$\Lambda \cap i\mathbb{R} = \{\pm i\eta\}$ , for some $\eta > 0$ and $\begin{cases} \Lambda_{\text{sym}} \cap i\mathbb{R} = \{0\} \\ \Lambda_{\text{skew}} \cap i\mathbb{R} = \{\pm i\eta\} \end{cases}$	$\Lambda \cap i\mathbb{R} = \{\pm i\eta\}$ , for some $\eta > 0$ and $\begin{cases} \Lambda_{\text{sym}} \cap i\mathbb{R} = \{\pm i\eta\} \\ \Lambda_{\text{skew}} \cap i\mathbb{R} = \{0\} \end{cases}$
$\pi < \phi < 2\pi$	$\Lambda \cap i\mathbb{R} = \{0\}$	$\Lambda \cap i\mathbb{R} = \{\pm i\eta\}$ , for some $\eta > 0$ and $\begin{cases} \Lambda_{\text{sym}} \cap i\mathbb{R} = \{\pm i\eta\} \\ \Lambda_{\text{skew}} \cap i\mathbb{R} = \{0\} \end{cases}$	$\Lambda \cap i\mathbb{R} = \{\pm i\eta\}$ , for some $\eta > 0$ and $\begin{cases} \Lambda_{\text{sym}} \cap i\mathbb{R} = \{0\} \\ \Lambda_{\text{skew}} \cap i\mathbb{R} = \{\pm i\eta\} \end{cases}$

*Proof.* According to Proposition 3.2, the singular exponents are given by the zeros of the functions  $f^\pm$ . As the functions  $f^\pm$  are odd, it is sufficient to study their zeros on  $(0; +\infty)$ .

★ First assume that  $0 < \phi < \pi$ . Then, we have  $b = (2\pi - \phi)/\phi > 1$  and  $b_\Sigma = b$ . We can check that  $f^\pm$  do not vanish when  $\kappa_\varepsilon \notin [-b_\Sigma; -1/b_\Sigma]$ :

- if  $\kappa_\varepsilon < -b_\Sigma$ , then on  $(0; +\infty)$ ,  $f^-(t) > (1 + \kappa_\varepsilon^{-1}) \tanh(t) > 0$  and  $f^+(t) < \tanh(bt) - b \tanh(t) < 0$ ;
- if  $\kappa_\varepsilon > -1/b_\Sigma$  then on  $(0; +\infty)$ ,  $f^-(t) < \tanh(bt) - b \tanh(t) < 0$  and  $f^+(t) > (1 + \kappa_\varepsilon) \tanh(t) > 0$ .

Now, we wish to prove that

$$\kappa_\varepsilon \in (-b_\Sigma; -1) \quad \implies \quad \exists! \eta > 0 \text{ such that } f^+(\eta\phi/2) = 0 \text{ and } f^-(t) \neq 0, \forall t \in (0; +\infty),$$

$$\kappa_\varepsilon \in (-1; -1/b_\Sigma) \quad \implies \quad \exists! \eta > 0 \text{ such that } f^-(\eta\phi/2) = 0 \text{ and } f^+(t) \neq 0, \forall t \in (0; +\infty).$$

- Case  $\kappa_\varepsilon \in (-b_\Sigma; -1)$ . With the same arguments as before we have  $f^- > 0$  on  $(0; +\infty)$ . On the other hand, a careful analysis of the monotony shows that  $f^+$  vanishes exactly once on  $(0; +\infty)$  if and only if  $\kappa_\varepsilon \in (-b_\Sigma; -1)$ . More precisely, one checks that  $(f^+)'(0) = \kappa_\varepsilon + b_\Sigma > 0$  (and  $f^+(0) = 0$ ), while  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f^+(t) = \kappa_\varepsilon + 1 < 0$ . This proves that  $f^+$  has at least one zero in  $(0; +\infty)$ . Then one proves that the derivative of  $f^+$  changes sign once and only once on  $(0; +\infty)$  to conclude.
  - Case  $\kappa_\varepsilon \in (-1; -1/b_\Sigma)$ . With analogous arguments we obtain  $f^+ > 0$  on  $(0; +\infty)$  and we establish that  $f^-$  has exactly one zero on  $(0; +\infty)$  if and only if  $\kappa_\varepsilon \in (-1; -1/b_\Sigma)$ .
- ★ To consider the situation  $\pi < \phi < 2\pi$ , it is sufficient to note that the singularities of the operators  $\text{div}(\varepsilon^{-1}\nabla \cdot)$  and  $-\text{div}(\varepsilon^{-1}\nabla \cdot)$  are the same and to use the results of the case  $0 < \phi < \pi$  with  $\kappa_\varepsilon$  replaced by  $1/\kappa_\varepsilon$ . Indeed, with this multiplication by  $-1$ , the roles of  $\Omega_m$  and  $\Omega_d$  are exchanged.  $\square$

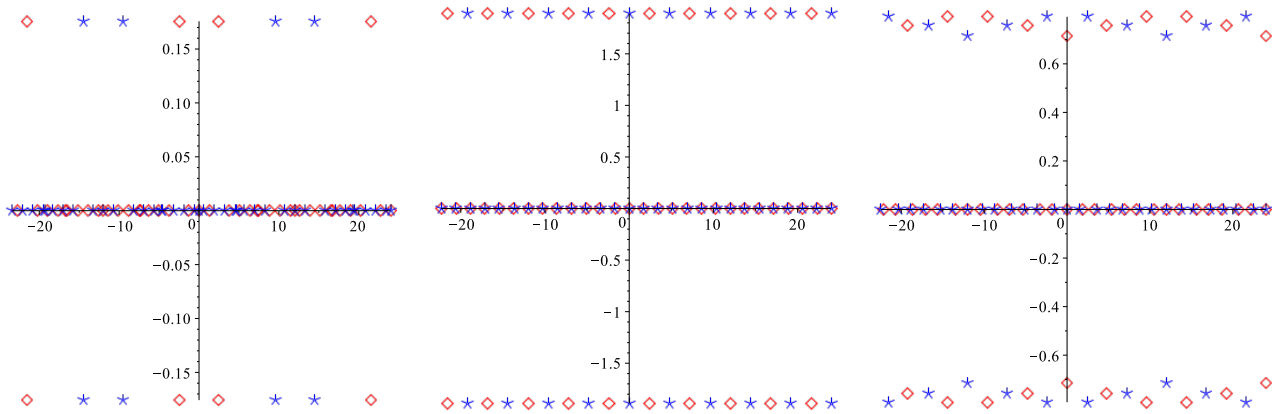


Figure 3.4: Set of singular exponents  $\Lambda$  for  $\phi = 5\pi/12$  (in this case  $I_c = [-3.8; -0.26315]$ ). The singular exponents  $\lambda \in \Lambda_{\text{skew}}$  are represented with asterisks while the singular exponents  $\lambda \in \Lambda_{\text{sym}}$  are represented with diamonds. Left:  $\kappa_\varepsilon = -18.684$ . Middle:  $\kappa_\varepsilon = -1.1871$ . Right:  $\kappa_\varepsilon = -0.4641$ .

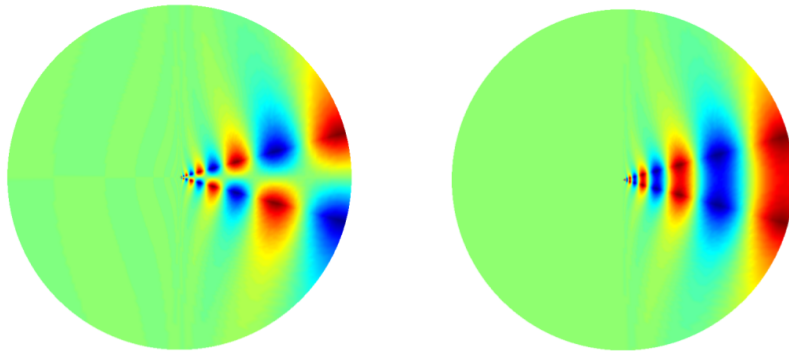


Figure 3.5: Real part of the skew-symmetric (left) and symmetric (right) oscillating singularity near the corner  $\mathbf{c}$ .

In Figure 3.4, we display the set of singular exponents  $\Lambda$  for contrasts outside and inside the critical interval  $I_c$  for a given angle  $\phi$ . The results are in accordance with Lemma 3.2 (observe also that  $\Lambda$  may contain complex eigenvalues even if  $\kappa_\varepsilon \notin I_c$ ). In the following, for a contrast  $\kappa_\varepsilon \in (-b_\Sigma; -1/b_\Sigma) \setminus \{-1\}$ , we shall often refer to  $s^\pm$  where

$$s^\pm(r, \theta) = r^{\pm i\eta} \Phi(\theta).$$

We recall that  $\eta$  is chosen positive. With the results of Proposition 3.2 and Lemma 3.2 one can check that the eigenfunctions  $\Phi$  are defined as follows.

$$\text{If } \Lambda_{\text{skew}} \cap i\mathbb{R} \neq \{0\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi(\theta) = \frac{\sinh(\eta\theta)}{\sinh(\eta\phi/2)} \text{ on } [0; \phi/2]; \quad \Phi(\theta) = \frac{\sinh(\eta(\pi - \theta))}{\sinh(\eta(\pi - \phi/2))} \text{ on } [\phi/2; \pi]; \\ \Phi(\theta) = -\Phi(-\theta) \text{ on } [-\pi; 0]. \end{array} \right. \quad (3.22)$$

$$\text{If } \Lambda_{\text{sym}} \cap i\mathbb{R} \neq \{0\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi(\theta) = \frac{\cosh(\eta\theta)}{\cosh(\eta\phi/2)} \text{ on } [0; \phi/2]; \quad \Phi(\theta) = \frac{\cosh(\eta(\pi - \theta))}{\cosh(\eta(\pi - \phi/2))} \text{ on } [\phi/2; \pi]; \\ \Phi(\theta) = \Phi(-\theta) \text{ on } [-\pi; 0]. \end{array} \right. \quad (3.23)$$

Going back to the time-domain and multiplying the oscillating singularities by the harmonic term  $e^{-i\omega t}$  leads us to consider functions which behave like

$$s^\pm(r, \theta)e^{-i\omega t} = e^{i(\pm\eta \ln r - \omega t)}\Phi(\theta) \quad (3.24)$$

near the corner  $\mathbf{c}$ . Let us compute the phase velocity of these waves. A point  $M$  of phase  $i(\pm\eta \ln r - \omega t)$  will be located at  $r + dr$  at  $t + dt$  with  $\pm\eta \ln(r + dr) - \omega(t + dt) = \pm\eta \ln r - \omega t$ . Since  $\ln(r + dr) = \ln r + dr/r + o(1/r)$  for  $dr$  small, one finds the phase velocity  $dr/dt = \pm\omega r/\eta$  for the waves (3.24). Note that it tends to zero when approaching the origin. The wave  $s^-(r, \theta)e^{-i\omega t}$  seems to propagate to the corner but never reaches it. This is the reason why in the following, it will be referred to as ‘‘black-hole wave’’. By extension, we will use the same denomination for the other wave  $s^+(r, \theta)e^{-i\omega t}$  which seems to come from  $\mathbf{c}$ . Finally, we point out that from time to time in this paper, the oscillating singularities will be called ‘‘black-hole singularities’’.

### 3.3.3 Selecting the outgoing solution I: energy trapped at the corner

For a contrast  $\kappa_\varepsilon \in I_c \setminus \{-1\}$ , looking for a solution of the scattering problem in  $H_{\text{loc}}^1$  (*i.e.* with a local finite electromagnetic energy) would lead to exclude a behaviour at a corner like the one of the oscillating singularities  $s^\pm(r, \theta)$ . Nonetheless allowing such singular behaviour is necessary to obtain existence (and uniqueness) of a solution  $u$  to Problem (3.6). Therefore, we are led to consider  $u$  which decomposes, in a neighbourhood of  $\mathbf{c}$ , as

$$u = a + b_+s^+ + b_-s^- + \tilde{u}, \quad (3.25)$$

where  $\tilde{u}$  is a smooth function and  $a, b_\pm$  are complex constants. Roughly speaking  $\tilde{u}$  is smooth means that it is a superposition of singularities with singular exponents  $\lambda$  such that  $\Re \lambda > 0$  (see §3.6.3). We recall that 0 belongs to  $\Lambda$  for all  $\kappa_\varepsilon < 0$ , that the associated singularities are 1 and  $\ln r$ , and that only the constant is locally in  $H^1$ . In order to get uniqueness of the solution for (3.7), as shown in [18], a relation on  $b_\pm$  has to be enforced. A priori, it is not obvious to decide which condition to impose that will give the ‘‘physical’’ solution because the singularities  $s^\pm$  have very similar behaviours at  $\mathbf{c}$ . In particular, due to the change of sign of the permittivity  $\varepsilon$ , considerations based on phase velocity are not sufficient. To identify the relevant condition, we study in this paragraph the energy carried by  $s^\pm$ . Let us consider a function  $u$  of the form (3.25) which satisfies the equation  $\text{div}(\varepsilon^{-1}\nabla u) + k_0^2\mu u = 0$  in the vicinity of the corner  $\mathbf{c}$ . Proceeding like at the end of §3.2.2, one can easily verify that the quantity

$$J := \Im m \left( \int_{\partial D_\rho} \varepsilon^{-1} \partial_r u \bar{u} d\sigma \right) \quad (3.26)$$



defined for  $\rho$  small enough, is independent of  $\rho$ . It represents the energy flux through  $\partial D_\rho$  coming from the corner. Plugging (3.25) in the left-hand side of (3.26) yields

$$J = \eta(|b_+|^2 - |b_-|^2) \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon^{-1} \Phi^2 d\theta. \quad (3.27)$$

Indeed, on the one hand, using that  $\Phi$ , given by (3.22) or (3.23), is real-valued, one can check that

$$\int_{\partial D_\rho} \varepsilon^{-1} \partial_r s^\pm \overline{s^\mp} d\sigma = \pm i\eta \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon^{-1} \Phi^2 d\theta. \quad (3.28)$$

On the other hand, one can prove that all the other cross-terms tend to 0 as  $\rho \rightarrow 0$  (proceed as in §3.6.3). Then identity (3.27) follows by noting that  $\overline{s^+} = s^-$ . The sign of the integral appearing in (3.27) which is not obvious because of the presence of the parameter  $\varepsilon$ , plays an important role to compute energy balances. Explicit calculations detailed in the Annex (see Lemma 3.4) allow us to conclude that:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon^{-1} \Phi^2 d\theta > 0 \quad \text{if } \kappa_\varepsilon \in (-b_\Sigma; -1) \quad \text{and} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon^{-1} \Phi^2 d\theta < 0 \quad \text{if } \kappa_\varepsilon \in (-1; -1/b_\Sigma). \quad (3.29)$$

We see that the sign of the integral depends only on the contrast of the physical parameters of the two materials. If  $\varepsilon_d^{-1} > |\varepsilon_m|^{-1}$ , then the integral is positive, and vice versa.

Now, consider for instance the case  $\kappa_\varepsilon \in (-b_\Sigma; -1)$ . Since by definition  $\eta$  is positive, we observe with (3.27) that the singularity  $s^+$  adds a positive contribution to the energy flux  $J$ . It means that  $s^+$  carries some energy produced by the corner. We say that  $s^+$  is the ‘‘incoming’’ singularity ( $s^{\text{in}} = s^+$ ) because it brings energy into the system. On the contrary,  $s^-$  adds a negative contribution to  $J$ : it carries some energy absorbed by the corner. We say that  $s^-$  is the ‘‘outgoing’’ singularity ( $s^{\text{out}} = s^-$ ). When  $\kappa_\varepsilon \in (-1; -1/b_\Sigma)$ , according to (3.29), we take  $s^{\text{out}} = s^+$  and  $s^{\text{in}} = s^-$ . The results are summarized in Table 3.1 below. To conclude, in the following, we impose that the solution of Problem (3.6) decomposes only on the outgoing singularity  $s^{\text{out}}$  and not on  $s^{\text{in}}$  because  $s^{\text{in}}$  carries some energy produced by the corner which is not physical.

**Remark 3.1.** *The terminology ‘‘incoming/outgoing’’, inspired by the scattering theory, is mainly related to the point of view developed in section 3.4, where  $s^{\text{out}}$  (resp.  $s^{\text{in}}$ ) corresponds to an outgoing (resp. incoming) propagative mode in a waveguide.*

	$\kappa_\varepsilon \in (-b_\Sigma; -1)$	$\kappa_\varepsilon \in (-1; -1/b_\Sigma)$
	$s^{\text{out}}(r, \theta) = s^-(r, \theta) = r^{-i\eta} \Phi(\theta)$	$s^{\text{out}}(r, \theta) = s^+(r, \theta) = r^{+i\eta} \Phi(\theta)$
$0 < \phi < \pi$	$\Phi$ given by (3.22) skew-symmetric	$\Phi$ given by (3.23) symmetric
$\pi < \phi < 2\pi$	$\Phi$ given by (3.23) symmetric	$\Phi$ given by (3.22) skew-symmetric

Table 3.1: Features of the outgoing singularity with respect to the configuration.

**Remark 3.2.** *Note that when  $\kappa_\varepsilon \in (-1; -1/b_\Sigma)$ , the wave  $s^{\text{out}} e^{-i\omega t}$  (see (3.24)) has a positive phase velocity and seems to come from the corner. However,  $s^{\text{out}}$  propagates energy towards the corner. We stress that we select the physical solution according to the group velocity and not according to the phase velocity.*

Let us briefly present another approach, which has been used in [18] (see also [103] in a slightly different context), to define the ‘‘physical’’ singularity. We emphasize that it leads to select the same solution.

### 3.3.4 Selecting the outgoing solution II: limiting absorption principle

We recall that the original Drude's model (3.2) includes a small parameter  $\gamma$  which takes into account classical dissipation Joule effects. We point out that we choose  $\gamma \geq 0$  so that, with the convention of a harmonic term equal to  $e^{-i\omega t}$ , energy is indeed lost by the structure (the alternative convention  $e^{i\omega t}$  leads to take  $\gamma \leq 0$  in order to model dissipation). We denote by  $\varepsilon_m^\gamma$  the permittivity obtained with this model and we define  $\varepsilon^\gamma$  the function such that  $\varepsilon^\gamma = \varepsilon_d$  in  $\Omega_d$ ,  $\varepsilon^\gamma = \varepsilon_m^\gamma$  in  $\Omega_m$ . The smallness of  $\gamma$  compared to the considered range of frequencies has led us to neglect it in the analysis and this is the reason of the difficulties we have encountered. Indeed, when  $\gamma > 0$ ,  $\kappa_{\varepsilon^\gamma} := \varepsilon_m^\gamma / \varepsilon_d \notin \mathbb{R}$  and one can easily check that the functions  $f^\pm$  defined in Proposition 3.2 with  $\kappa_\varepsilon$  replaced by  $\kappa_{\varepsilon^\gamma}$  do not vanish on  $(0; +\infty)$ . In other words, purely oscillating singularities do not occur with dissipation. More mathematically, when  $\varepsilon$  is changed to  $\varepsilon^\gamma$ , the new sesquilinear form associated with Problem (3.13) becomes coercive in  $H^1(D_R)$ . Therefore, the dissipative problem always admits a unique solution, denoted  $u^\gamma$ , in this space. The function  $u^\gamma$  decomposes near the corner as

$$u^\gamma = a^\gamma + b^\gamma s^\gamma + \tilde{u}^\gamma,$$

where  $a^\gamma, b^\gamma$  are constants,  $\tilde{u}^\gamma$  is a smooth function and  $s^\gamma(r, \theta) = r^{\lambda^\gamma} \Phi^\gamma(\theta)$ . Here,  $\lambda^\gamma$  is the singular exponent of smallest positive real part of  $\Lambda^\gamma$ , the set of values of  $\lambda$  such that (3.20), with  $\varepsilon$  replaced by  $\varepsilon^\gamma$ , has a non zero solution. The following result confirms the relevance of choosing the outgoing singularity  $s^{\text{out}}$  according to Table 3.1.

**Proposition 3.3.** *Assume that  $\kappa_\varepsilon \in (-b_\Sigma; -1/b_\Sigma) \setminus \{-1\}$ . Then  $s^{\text{out}} = \lim_{\gamma \rightarrow 0} s^\gamma$ , where  $s^{\text{out}}$  is defined according to Table 3.1.*

Let us sketch the proof. Denote  $\lambda_\pm^\gamma \in \Lambda^\gamma$  the singular exponent which tends to  $\pm i\eta$  as  $\gamma$  goes to zero. Introduce  $\hat{\lambda}_\pm$  the first order term appearing in the Taylor expansion  $\lambda_\pm^\gamma = \pm i\eta + \gamma \hat{\lambda}_\pm + \dots$ . Using the implicit functions theorem, one can prove that  $\hat{\lambda}_\pm$  are real valued,  $\hat{\lambda}_+ = -\hat{\lambda}_-$  and  $\hat{\lambda}_+ \int_{-\pi}^\pi \varepsilon^{-1} |\Phi|^2 d\theta < 0$ . Assume that  $\kappa_\varepsilon \in (-b_\Sigma; -1)$ . Then, according to (3.29), we have  $\int_{-\pi}^\pi \varepsilon^{-1} |\Phi|^2 d\theta > 0$ . Since by definition  $\Re \lambda^\gamma > 0$ , we deduce that  $\lambda^\gamma$  coincides with  $\lambda_-^\gamma$  and therefore, tends to  $-i\eta$  as  $\gamma \rightarrow 0$ . This implies  $\lim_{\gamma \rightarrow 0} s^\gamma = s^-$ . But Table 3.1 ensures that  $s^- = s^{\text{out}}$  when  $\kappa_\varepsilon \in (-b_\Sigma; -1)$ . The case  $\kappa_\varepsilon \in (-1; -1/b_\Sigma)$  can be handled in a similar way.

In Figure 3.8 (middle), we represent the set  $\Lambda^\gamma$  for a small value of  $\gamma > 0$ . One observes that the numerical results are in accordance with Proposition 3.3.

### 3.3.5 A well-posed formulation of the scattering problem for a contrast inside the critical interval

At this point, we have provided the ingredients to obtain a well-posed formulation for the scattering Problem (3.6) with a contrast lying in the critical interval. When  $\kappa_\varepsilon \in I_c \setminus \{-1\}$ , we look for solutions  $u$  which admit the expansion

$$u = bs^{\text{out}} + \tilde{u} \quad \text{in } \mathbb{R}^2, \quad \text{with } b \in \mathbb{C}, \quad \tilde{u} \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^2), \quad (3.30)$$

where the outgoing singularity  $s^{\text{out}}$  is defined according to Table 3.1. Note that imposing the specific behaviour (3.30) for the solution is like imposing a radiation condition at the corner. As nicely written in [8] for another problem sharing analogous properties, this boils down to allow a ‘‘leak’’ at  $\mathbf{c}$ . Now, we prove the well-posedness of the problem in this setting. We start with a uniqueness result whose proof relies again on energy considerations.

**Lemma 3.3.** *Problem (3.6) has at most one solution admitting decomposition (3.30).*

*Proof.* Consider some  $u$  admitting decomposition (3.30) and satisfying Problem (3.6) with  $u^{\text{inc}} = 0$ . Multiplying the volume equation of (3.6) by  $\bar{u}$ , integrating by parts in  $D_R \setminus \overline{D_\rho}$  and taking the imaginary part, we get the energy balance

$$\Im m \left( \int_{\partial D_R} \varepsilon_d^{-1} \partial_r u \bar{u} d\sigma \right) = \Im m \left( \int_{\partial D_\rho} \varepsilon^{-1} \partial_r u \bar{u} d\sigma \right). \quad (3.31)$$

Denote  $J_{\text{ext}}$  (resp.  $J$ ) the left-hand side (resp. right-hand side) of (3.31). We have selected  $s^{\text{out}}$  so that

$$J = -\eta |b|^2 \left| \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon^{-1} \Phi^2 d\theta \right| \leq 0$$

(see the discussion after (3.29)). Therefore, from (3.31) we deduce that  $J_{\text{ext}} \leq 0$ . This is true also with  $R$  replaced by  $\xi \geq R$ . Then using identity (3.14) and working as in the proof of Lemma 3.1 with Rellich's lemma, we obtain  $u = 0$  in  $\mathbb{R}^2$ .  $\square$

The proof of existence of a solution requires more involved arguments based on the Kondratiev theory [86] and is beyond the scope of the present article. We refer the reader to [18, 14] where a detailed explanation of the technique is presented in a simple geometry. Finally we can state the

**Proposition 3.4.** *Let  $\omega > 0$  be a given frequency. Assume that the contrast  $\kappa_\varepsilon = \varepsilon_m/\varepsilon_d$  verifies  $\kappa_\varepsilon \in (-b_\Sigma; -1/b_\Sigma) \setminus \{-1\}$ , where  $b_\Sigma$  has been defined in (3.9). Then Problem (3.6) has a unique solution  $u$  admitting decomposition (3.30). Moreover there exists  $C > 0$  independent of the data  $g^{\text{inc}}$  such that*

$$|b| + \|\tilde{u}\|_{H^1(D_R)} \leq C \|g^{\text{inc}}\|_{L^2(\partial D_R)}.$$

**Remark 3.3.** *The results of Proposition 3.4 can be extended to consider Problem (3.6) with a volume equation replaced by  $\text{div}(\varepsilon^{-1} \nabla u) + k_0^2 \mu u = f$ ,  $f$  being a given source term. Well-posedness is ensured if  $f$  has a compact support and if  $f$  is such that  $r^{1-\nu} f \in L^2(\mathbb{R}^2)$  for some  $\nu > 0$ . In particular  $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$  with a compact support is allowed.*

Let us make some comments to conclude this section:

- In the recent paper [91], the author suggests that the good way to formulate the scattering problem for a contrast inside the critical interval is to choose  $u$  in the vicinity of the corner such that  $J$  defined in (3.26) vanishes. This is attractive because in this case, the metallic scatterer neither absorbs nor produces energy (like in (3.12)). To get such a solution, one must keep both incoming and outgoing singularities, with the balancing condition  $|b^+| = |b^-|$ . In other words,  $u$  must decompose as

$$u = b(s^+ + e^{it} s^-) + \tilde{u}, \quad (3.32)$$

where  $b \in \mathbb{C}$ ,  $t \in [0, 2\pi)$  and where  $\tilde{u}$  is a smooth function. In the present article, we did not use this criterion for the following reasons. First, there is still an undetermined parameter to set, namely the phase  $t$ . Second, the limiting absorption principle, which can be rigorously proven working as in [18, Theorem 4.3], is satisfied in the setting (3.30) but not in the setting (3.32). Therefore, it is our opinion that the decomposition (3.30) is more relevant from a physical point of view than (3.32).

- When the contrast and the interface are such that for the  $N$  vertices  $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_N$ , there exist oscillating singularities  $s_n^\pm(r_n, \theta_n) := r_n^{\pm i\eta_n} \Phi_n(\theta_n)$  at  $\mathbf{c}_n$ , ( $\eta_n > 0$ ) the analysis is exactly the same. Here,  $(r_n, \theta_n)$

denote the polar coordinates associated with  $\mathbf{c}_n$ . In this case, we can prove that Problem (3.6) has a unique solution  $u$  which admits the expansion

$$u = \sum_{n=1}^N b_n s_n^{\text{out}} + \tilde{u} \quad \text{in } \mathbb{R}^2, \quad \text{with } b_n \in \mathbb{C} \text{ and } \tilde{u} \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^2). \quad (3.33)$$

In that case, working as in (3.31), denoting  $\partial D_\rho^n := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid |r_n| = \rho\}$ , we obtain the energy balance

$$J_{\text{ext}} = \sum_{n=1}^N J_n, \quad \text{with } J_n := \Im m \left( \int_{\partial D_\rho^n} \varepsilon^{-1} \partial_{r_n} u \bar{u} d\sigma \right) = -\eta_n |b_n|^2 \left| \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon^{-1} \Phi_n^2 d\theta_n \right|. \quad (3.34)$$

Using (3.34), one can quantify the energy trapped by each corner (see §3.4.4 for numerical illustrations).

### 3.4 Approximation of the solution for a contrast inside the critical interval

We have obtained a well-posed formulation for Problem (3.6) with a contrast inside the critical interval. It leads to look for solutions  $u$  which decompose as  $u = \sum_n b_n s_n^{\text{out}} + \tilde{u}$  (see (3.33)). Now, a natural question is: how to approximate  $u$ ? Let us try to use a classical finite element method. We consider a setting where the inclusion is a triangular silver inclusion embedded in vacuum. The angles of the triangle (see Figure 3.6) are equal to  $\phi_1 = \pi/6$  (top corner) and  $\phi_2 = \phi_3 = 5\pi/12$  (bottom corners). For such geometry, according to (3.9) and (3.10), we have  $b_\Sigma = (2\pi - \pi/6)/(\pi/6) = 11$  so that the critical interval is given by

$$I_c = [-11; -1/11].$$

For silver, the plasma frequency is  $\omega_p = 13.3$  PHz [58]. From the dissipationless Drude's model (3.3), we deduce that

$$\kappa_\varepsilon \in I_c \iff \omega \in \left[ \frac{\omega_p}{\sqrt{1+b_\Sigma}}; \frac{\omega_p}{\sqrt{1+1/b_\Sigma}} \right] = [3.839 \text{ PHz}; 12.733 \text{ PHz}].$$

For our experiment, we set  $\omega = 9$  PHz (corresponding to  $\varepsilon_m(\omega) = -1.1838$ ),  $\varepsilon_d = 1$ ,  $\mu_m = \mu_d = 1$ . Therefore, we have  $\kappa_\varepsilon = \varepsilon_m/\varepsilon_d = -1.1838 \in [-11; -1]$ . For the other parameters, we take

$$u^{\text{inc}}(\mathbf{x}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad \mathbf{k} = k (\cos \alpha^{\text{inc}} \vec{e}_x + \sin \alpha^{\text{inc}} \vec{e}_y), \quad k = k_0 = \omega/c, \quad \text{and} \quad \alpha^{\text{inc}} = -\pi/12.$$

In Figure 3.6, we represent the approximated total field obtained using a standard P2 finite element method for three different meshes. The incident plane wave produces both a usual scattered field outside the inclusion and a typical plasmonic wave at the interface between the two materials. When we refine the mesh, the scattered field outside the inclusion is approximately stable. However, the plasmonic wave seems very sensitive to the mesh (see in particular at the bottom and right edges of the inclusion). The numerical solution does not converge when the mesh size tends to zero, the classical finite element method fails to approximate the field which is not in  $H^1$  locally around the corners. More precisely, this is due to the fact that it is impossible to capture the oscillations of the singularities  $s_n^{\text{out}}$  (see Figures 3.3, 3.5) with a mesh of given size. Spurious reflections are always produced. Hence, we have to develop another method.

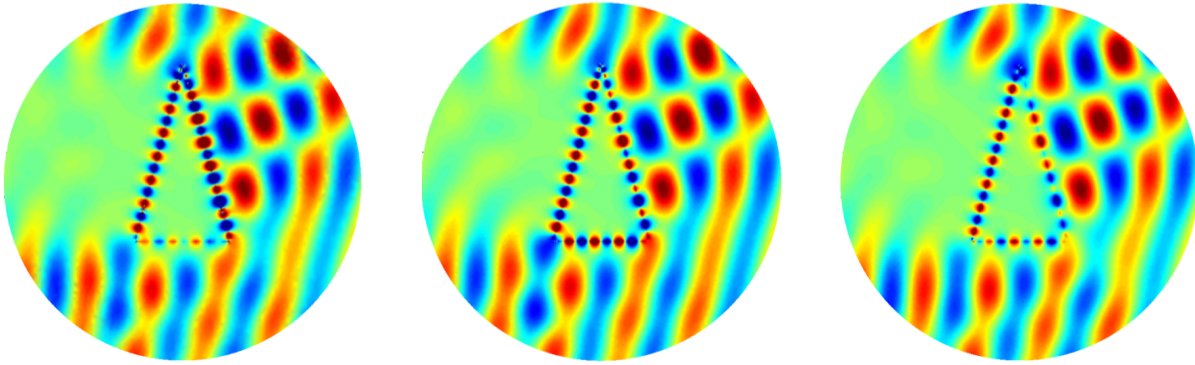


Figure 3.6: Solution obtained using a standard P2 finite element method for different meshes: from left to right, 13273 nodes, 56031 nodes and 100501 nodes. The frequency is set to  $\omega = 9$  PHz ( $\kappa_\varepsilon = -1.1838$ ). Note that the computed field is not stable at the interface when we refine the mesh.

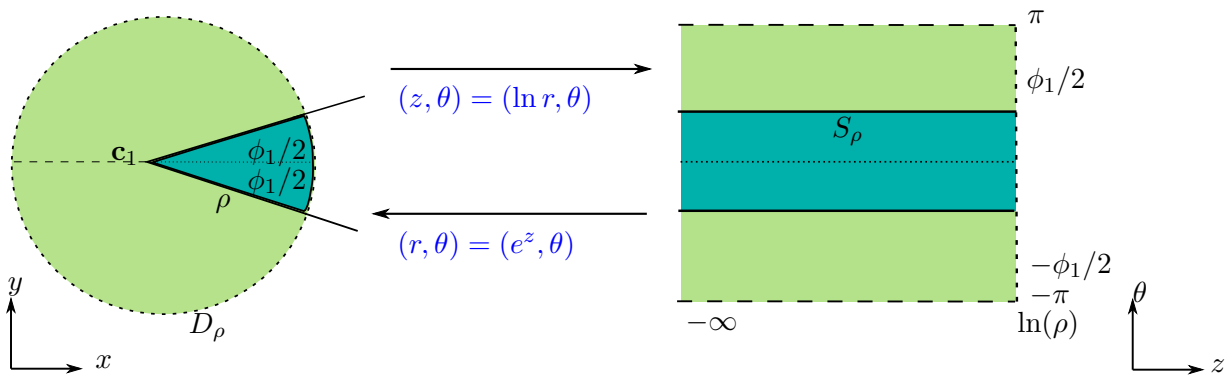


Figure 3.7: Change of variables at the corner. The disk  $D_\rho$  is transformed into a semi-infinite strip  $S_\rho$  (the waveguide) with periodic conditions in  $\theta$ . As  $r \rightarrow 0$ ,  $z$  tends to  $-\infty$ .

### 3.4.1 Analogy with a waveguide problem

In order to capture the oscillations of  $s_n^{\text{out}}$ , a natural idea consists in unfolding a neighbourhood of each corner using a change of variables. To explain the idea, assume that there is only one corner  $\mathbf{c}$ . Define  $z = \ln r$  (as it is classical for the Mellin transform [86])  $\check{u}(z, \theta) = u(e^z, \theta)$ . In a neighbourhood of  $\mathbf{c}$ , the function  $\varepsilon$  depends only on  $\theta$  so we make no difference between  $\varepsilon(r, \theta)$  and  $\varepsilon(z, \theta)$ . With this notation, as illustrated by Figure 3.7, Equation (3.18) in  $D_\rho$  is changed into the equation

$$(\varepsilon^{-1} \partial_z^2 + \partial_\theta \varepsilon^{-1} \partial_\theta) \check{u} + k_0^2 e^{2z} \mu \check{u} = 0$$

in the semi-infinite strip (the waveguide)  $S_\rho := (-\infty; \ln \rho) \times (-\pi; \pi)$ . Note that  $z = \ln r \rightarrow -\infty$  when  $r \rightarrow 0$ . As a consequence, the corner is sent to  $-\infty$  in the waveguide. With this change of variables, the function  $\check{u}$  is  $2\pi$ -periodic in  $\theta$ :  $\check{u}(\cdot, -\pi) = \check{u}(\cdot, \pi)$  and  $\partial_\theta \check{u}(\cdot, -\pi) = \partial_\theta \check{u}(\cdot, \pi)$ . On the other hand, the term  $k_0^2 e^{2z} \mu$  is exponentially decaying as  $z \rightarrow -\infty$ . As a consequence, the behaviour of  $\check{u}$  at  $-\infty$  is determined by the functions  $\check{s}$  which satisfy

$$(\varepsilon^{-1} \partial_z^2 + \partial_\theta \varepsilon^{-1} \partial_\theta) \check{s} = \text{div}(\varepsilon \nabla \check{s}) = 0 \quad \text{in } S_\rho$$

and which are  $2\pi$ -periodic for the  $\theta$  variable. Since  $r = e^z$ , the singularities  $s(r, \theta) = r^\lambda \Phi(\theta)$ , solutions of (3.19) in  $D_\rho$ , are turned into  $\check{s}(z, \theta) = e^{\lambda z} \Phi(\theta)$  in  $S_\rho$ . These functions are commonly called the modes of the waveguide  $S_\rho$ . In §3.3.1, we said that for  $\lambda \in \Lambda$  such that  $\Re \lambda > 0$  the singularity

$s = r^\lambda \Phi$  belongs to  $H^1(D_\rho)$ . In this case, the associated mode  $\check{s} = e^{\lambda z} \Phi$  is evanescent in the waveguide  $S_\rho$ . While, for  $\lambda = \pm i\eta$ ,  $\eta > 0$ , the oscillating singularities  $s^\pm$  do not belong to  $H^1(D_\rho)$ . The corresponding modes  $\check{s}^\pm := e^{\pm i\eta z} \Phi$  are propagative in  $S_\rho$ . According to Lemma 3.2, we know that propagative modes exist only for contrasts inside the critical interval. In the presence of propagative modes, it is well-known that a radiation condition at infinity in the waveguide has to be enforced to obtain a well-posed problem. But we have already done this work for the corner problem. Define  $\check{s}^{\text{out}}$  such that  $\check{s}^{\text{out}}(z, \theta) = s^{\text{out}}(e^z, \theta)$ . Then in the waveguide  $S_\rho$ , we look for solutions  $\check{u}$  which decompose as  $\check{u} = b\check{s}^{\text{out}} + \check{u}_{\text{ev}}$ ,  $b \in \mathbb{C}$ , where  $\check{u}_{\text{ev}}$  is the sum of a constant term and evanescent modes at  $-\infty$ .

For numerical purposes, we will use the analogy with the waveguide writing a formulation of the scattering problem in a domain split in two parts, namely the perforated domain  $D_R/\overline{D_\rho}$  and the semi-infinite strip  $S_\rho$ . The main difficulty lies in the fact that the new geometry is unbounded and that the solution we want to approximate does not decay at infinity in  $S_\rho$ . However, many efficient techniques have already been developed to consider waveguide problems in presence of propagative modes. A class of methods consists in bounding artificially the waveguide to compute an approximation of the solution on a bounded domain. For this kind of approaches, it is well known that the waveguide has to be bounded in a clever way to avoid spurious reflections on the artificial boundary. One technique to achieve this end is to use a Perfectly Matched Layer (PML) [29, 6]. In the following, we apply this method to our problem. First, we set up the PML. Then, we explain how to truncate the PML to derive a formulation set in a bounded domain which can be discretized numerically.

### 3.4.2 A new formulation of the scattering problem

To take advantage of the waveguide analogy, we will discretize the problem in  $S_\rho$  instead of the original one in  $D_\rho$ . More precisely, we write a new formulation of Problem (3.7) set in a split domain: we write a formulation in the perforated domain  $D_R \setminus \overline{D_\rho}$  that we couple with a formulation written in the semi-infinite strip  $S_\rho$ . Namely looking for a solution  $u$  of Problem (3.7) writes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Find } (u, \check{u}) \text{ such that:} \\ \operatorname{div}(\varepsilon^{-1} \nabla u) + k_0^2 \mu u = 0 \quad \text{in } D_R \setminus \overline{D_\rho}, \\ \partial_r u = \mathcal{S}u + g^{\text{inc}} \quad \text{on } \partial D_R, \\ \partial_z(\varepsilon^{-1} \partial_z \check{u}) + \partial_\theta(\varepsilon^{-1} \partial_\theta \check{u}) + k_0^2 \mu e^{2z} \check{u} = 0 \quad \text{in } S_\rho, \\ \check{u}(\cdot, -\pi) = \check{u}(\cdot, \pi), \quad \partial_\theta \check{u}(\cdot, -\pi) = \partial_\theta \check{u}(\cdot, \pi), \\ \check{u} = b\check{s}^{\text{out}} + \check{u}_{\text{ev}}, \\ u(\rho, \cdot) = \check{u}(\ln \rho, \cdot), \quad \rho \partial_r u(\rho, \cdot) = \partial_z \check{u}(\ln \rho, \cdot), \end{array} \right.$$

where the last two equations ensure the matching through  $\partial D_\rho$  between  $u$  and  $\check{u}$ . As mentioned previously, a clever way to impose the radiation condition and artificially bound the domain is to use PMLs. Imposing a PML in the semi-infinite strip  $S_\rho$  boils down to compute an analytic continuation of  $\check{u}$ . In practice it leads to make the complex stretching  $z \mapsto z/\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . With this stretching one finds that  $\check{u}_\alpha(z, \theta) := \check{u}(z/\alpha, \theta)$  satisfies

$$(\alpha^2 \varepsilon^{-1} \partial_z^2 + \partial_\theta \varepsilon^{-1} \partial_\theta) \check{u}_\alpha + e^{2z/\alpha} k_0^2 \mu \check{u}_\alpha = 0 \quad \text{in } S_\rho.$$

Let us explain how to choose the parameter  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Without loss of generality, we can impose  $|\alpha| = 1$  so that  $\alpha = e^{i\vartheta}$  for some  $\vartheta \in (-\pi; \pi]$ . In order for the function  $z \mapsto e^{2z/\alpha}$  to be exponentially decaying at  $-\infty$ , we impose  $\Re e \alpha > 0$  which amounts to take  $\vartheta \in (-\pi/2; \pi/2)$ . On the other hand, observe that the modes of the problem  $(\alpha^2 \varepsilon^{-1} \partial_z^2 + \partial_\theta \varepsilon^{-1} \partial_\theta) \check{w} = 0$  with periodic boundary conditions

for the  $\theta$  variable are the functions  $(z, \theta) \mapsto e^{\lambda z/\alpha} \Phi(\theta)$ , where  $(\lambda, \Phi)$  corresponds to an eigenpair of Problem (3.20). And if  $\check{u}$  decomposes on the modes  $e^{\lambda z} \Phi(\theta)$ ,  $\check{u}_\alpha$ , the analytic continuation of  $\check{u}$ , decomposes on the modes  $e^{\lambda z/\alpha} \Phi(\theta)$ . Therefore, in order  $\check{u}_\alpha$  to be exponentially decaying at  $-\infty$ , we have to choose  $\alpha$  such that there holds  $\Re e(\lambda/\alpha) > 0$  for all  $\lambda \in \Lambda^{\text{out}} \setminus \{0\}$ . Here,  $\Lambda^{\text{out}}$  refers to the set of singular exponents appearing in the modal decomposition of  $\check{u}$ :

$$\Lambda^{\text{out}} := \{0, \lambda^{\text{out}}\} \cup \tilde{\Lambda}^{\text{out}} \quad \text{with} \quad \tilde{\Lambda}^{\text{out}} = \{\lambda \in \Lambda \mid \Re e \lambda > 0\},$$

where  $\lambda^{\text{out}}$  denotes the singular exponent of  $s^{\text{out}}$  defined according to Table 3.1. This means that we choose  $\vartheta$  such that  $\pi/2 + \arg(\lambda) > \vartheta > -\pi/2 + \arg(\lambda)$  for all  $\lambda \in \Lambda^{\text{out}} \setminus \{0\}$ , where  $\arg : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow (-\pi; \pi]$  denotes the complex argument. Let us clarify this.

★ When  $\kappa_\varepsilon \in (-b_\Sigma; -1)$ , according to Table 3.1, we have  $-i\eta \in \Lambda^{\text{out}}$  and  $i\eta \notin \Lambda^{\text{out}}$ . In this case, one takes  $\alpha$  such that  $\Re e(-i\eta/\alpha) > 0$ , that is  $\Im m(\alpha) < 0$ . Then, we choose  $\alpha = e^{i\vartheta}$  with  $\vartheta \in (\vartheta_-; 0)$ , where  $\vartheta_- := -\pi/2 + \max_{\lambda \in \tilde{\Lambda}^{\text{out}}} \arg(\lambda)$ .

★ When  $\kappa_\varepsilon \in (-1; -1/b_\Sigma)$ , we have  $i\eta \in \Lambda^{\text{out}}$  and  $-i\eta \notin \Lambda^{\text{out}}$ . Working as above, we find that a good choice for  $\alpha$  is  $\alpha = e^{i\vartheta}$  with  $\vartheta \in (0; \vartheta_+)$ , where  $\vartheta_+ := \pi/2 + \min_{\lambda \in \tilde{\Lambda}^{\text{out}}} \arg(\lambda)$ .

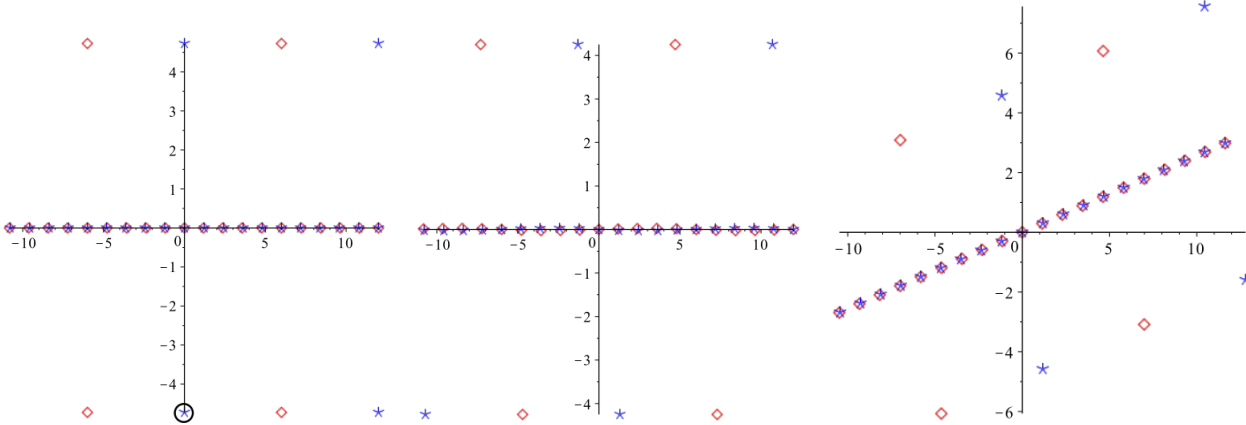


Figure 3.8: Left: set of singular exponents  $\Lambda = \Lambda_{\text{sym}} \cup \Lambda_{\text{skew}}$  (diamonds for  $\Lambda_{\text{sym}}$  and asteriks for  $\Lambda_{\text{skew}}$ ) for  $\omega = 9$  PHz ( $\kappa_\varepsilon = -1.1838 \in I_c$ ) and a corner aperture  $\phi = \pi/6$ . The singular exponent associated to  $s^{\text{out}}$  is circled in black. In accordance with the result of Proposition 3.3, the outgoing singularity  $s^{\text{out}}$  in this setting is  $s^-$  (and it is skew-symmetric). Middle: set  $\Lambda^\gamma$  for small  $\gamma$  ( $\gamma$  is the dissipation). Right: set of singular exponents with the PML.

In Figure 3.8, we display the sets of singular exponents for the problem with small dissipation and for the problem with a PML. The important point is that these two regularization processes move the singular exponent  $\lambda^{\text{out}}$  in the half plane  $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \Re e \lambda > 0\}$ . This suggests that our PML parameter  $\alpha$  has been correctly set. For the problem with a PML, all the modes except the constant one are evanescent. Therefore, for numerical purposes, we can truncate the waveguide  $S_\rho$ . Define the domain  $S_\rho^L = (\ln \rho - L; \ln \rho) \times (-\pi; \pi)$  with  $L > 0$ . On the boundary  $\{\ln \rho - L\} \times (-\pi; \pi)$ , we impose the Neumann condition  $\partial_z \check{u} = 0$  to allow constant behaviour at  $-\infty$  (the PML has no influence on the constant mode). We emphasize that the Dirichlet boundary condition would produce spurious reflections. We also introduce the parameter  $L_0 \in (0; L)$  such that the term  $k_0^2 \check{\mu} e^{2z} \check{u}$  becomes neglectable for all

$z \leq \ln \rho - L_0$  and we define the function  $\alpha$  such that

$$\alpha(z) := \begin{cases} 1 & \text{for } z \in (\ln \rho - L_0; \ln \rho), \\ \alpha & \text{for } z \in (\ln \rho - L; \ln \rho - L_0). \end{cases} \quad (3.35)$$

Working in the waveguide enables to dilate the radial coordinate near the corner and  $L_0$  defines the beginning of the PML. The previous analysis leads us to consider the problem

$$\left| \begin{array}{l} \text{Find } (u, \check{u}) \in H^1(D_R \setminus \overline{D_\rho}) \times H_{\text{per}}^1(S_\rho^L) \text{ such that:} \\ \quad \operatorname{div}(\varepsilon^{-1} \nabla u) + k_0^2 \mu u = 0 \quad \text{in } D_R \setminus \overline{D_\rho}, \\ \quad \partial_r u - \mathcal{S}u = g^{\text{inc}} \quad \text{on } \partial D_R, \\ (\varepsilon^{-1} \partial_z \alpha \partial_z + \alpha^{-1} \partial_\theta \varepsilon^{-1} \partial_\theta) \check{u} + \alpha^{-1} e^{2z/\alpha} k_0^2 \mu \check{u} = 0 \quad \text{in } S_\rho^L, \\ \quad \partial_z \check{u}(\ln \rho - L, \cdot) = 0, \\ u(\rho, \cdot) = \check{u}(\ln \rho, \cdot), \quad \rho \partial_r u(\rho, \cdot) = \partial_z \check{u}(\ln \rho, \cdot), \end{array} \right. \quad (3.36)$$

where  $H_{\text{per}}^1(S_\rho^L)$  denotes the Sobolev space of functions of  $H^1(S_\rho^L)$  which are  $2\pi$ -periodic for the  $\theta$  variable. We recall that  $g^{\text{inc}} = \partial_r u^{\text{inc}} - \mathcal{S}u^{\text{inc}}$ . Note that the above problem is set in a split domain. The last two equations of (3.36) ensure the matching between  $u$  and  $\check{u}$  through  $\partial D_\rho$ . The variational formulation associated with (3.36) writes

$$\left| \begin{array}{l} \text{Find } (u, \check{u}) \in X \text{ such that:} \\ b_1(u, v) + b_2(\check{u}, \check{v}) = l(v), \quad \forall (v, \check{v}) \in X, \end{array} \right. \quad (3.37)$$

with  $X := \{(v, \check{v}) \in H^1(D_R \setminus \overline{D_\rho}) \times H_{\text{per}}^1(S_\rho^L) \mid v(\rho, \cdot) = \check{v}(\ln \rho, \cdot)\}$ ,  $l(v) = \int_{\partial D_R} g^{\text{inc}} \bar{v} \, d\sigma$ ,

$$\begin{aligned} b_1(u, v) &= \int_{D_R \setminus \overline{D_\rho}} \varepsilon^{-1} \nabla u \cdot \overline{\nabla v} \, d\mathbf{x} - k_0^2 \int_{D_R \setminus \overline{D_\rho}} \mu u \bar{v} \, d\mathbf{x} - \varepsilon_d^{-1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} k \frac{H_n^{(1)'}(kR)}{H_n^{(1)}(kR)} u_n \bar{v}_n, \\ b_2(\check{u}, \check{v}) &= \int_{S_\rho^L} \alpha \varepsilon^{-1} \partial_z \check{u} \partial_z \bar{\check{v}} + \alpha^{-1} \varepsilon^{-1} \partial_\theta \check{u} \partial_\theta \bar{\check{v}} \, d\mathbf{x} - k_0^2 \int_{S_\rho^L} \alpha^{-1} e^{2z/\alpha} \mu \check{u} \bar{\check{v}} \, d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

### 3.4.3 Numerical approximation

Now we turn to the discretization of Problem (3.37). We use a P2 finite element method set on the domain which is the union of the perforated disk  $D_R \setminus \overline{D_\rho}$  and the rectangle  $S_\rho^L$ . We introduce  $(\mathcal{T}_h, \check{\mathcal{T}}_h)_h$  a shape regular family of triangulations of  $(D_{R,h} \setminus \overline{D_{\rho,h}}, S_{\rho}^L)$  where  $D_{j,h}$  is a polygonal approximation of  $D_j$ ,  $j = R, \rho$ . Here  $h$  refers to the mesh size. We assume that the meshes are such that all the triangles of  $(\mathcal{T}_h, \check{\mathcal{T}}_h)_h$  are located either in the positive material or in the metal. Note that considering a structured mesh for  $S_\rho^L$  boils down to work with a mesh having a logarithmic structure near the corner (see Figure 3.9).

Due to the behaviour of the black-hole singularities, this is of course very interesting. To get (almost) conforming approximations of  $X$ , we impose that the nodes of  $\mathcal{T}_h$  located on  $\partial D_{\rho,h}$  coincide with the ones of  $\check{\mathcal{T}}_h$  situated on  $\{\ln \rho\} \times [-\pi; \pi]$  (see Figure 3.10). Then we define the family of finite element spaces

$$\begin{aligned} X_h &:= \{(v, \check{v}) \in H^1(D_{R,h} \setminus \overline{D_{\rho,h}}) \times H_{\text{per}}^1(S_\rho^L) \text{ such that } v(\rho, \cdot) = \check{v}(\ln \rho, \cdot), \\ &\quad \text{and } (v|_\tau, \check{v}|_{\tau'}) \in \mathbb{P}_2(\tau) \times \mathbb{P}_2(\tau') \text{ for all } (\tau, \tau') \in \mathcal{T}_h \times \check{\mathcal{T}}_h\}. \end{aligned}$$



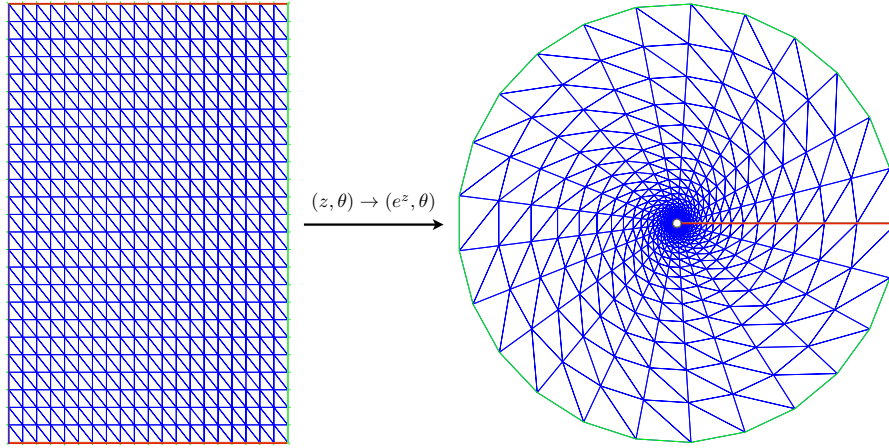


Figure 3.9: Left: mesh of  $S_\rho^L$ . Right: obtained mesh with the change of variables  $(z, \theta) \mapsto (e^z, \theta)$ .

Practically, we compute the solution of the problem

$$\begin{cases} \text{Find } (u_h, \check{u}_h) \in X_h \text{ such that:} \\ b_{1,h}(u_h, v_h) + b_2(\check{u}_h, \check{v}_h) = l_h(v_h) \quad \forall (v_h, \check{v}_h) \in X_h. \end{cases} \tag{3.39}$$

In (3.39) the forms  $b_{1,h}(\cdot, \cdot)$ ,  $l_h(\cdot)$  are defined as  $b_1(\cdot, \cdot)$ ,  $l(\cdot)$  (see (3.38)) with  $D_R \setminus \overline{D_\rho}$  replaced by  $D_{R,h} \setminus \overline{D_{\rho,h}}$  and the approximate transparent boundary condition  $\partial_r u - (ik - (2R)^{-1})u = \partial_r u^{\text{inc}} - (ik - (2R)^{-1})u^{\text{inc}}$  instead of the Dirichlet-to-Neumann map  $\mathcal{S}$ .

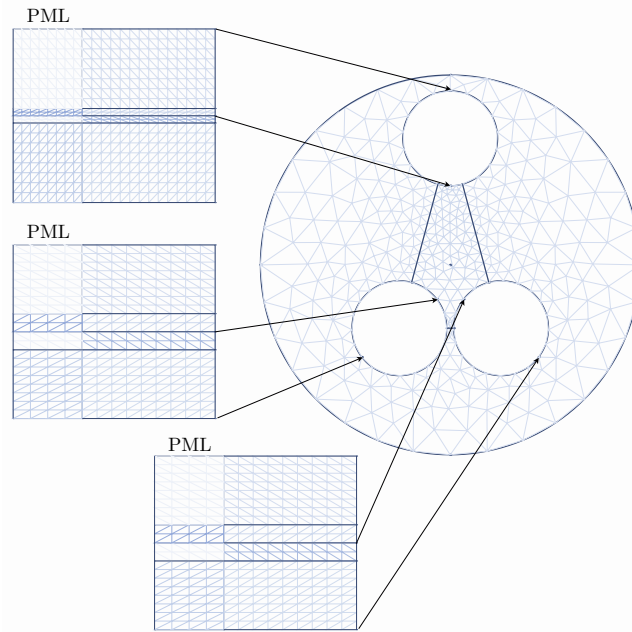


Figure 3.10: Example of (very coarse) mesh. The arrows show the corresponding nodes between the different meshes.

**Remark 3.4.** *In the case where the inclusion of metal has  $N$  corners, one discretizes the problem*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Find } (u, \check{u}_1, \dots, \check{u}_N) \in H^1(D_R \setminus \cup_{i=1}^N \overline{D_{\rho_i}}) \times H_{per}^1(S_1^{L_1}) \times \dots \times H_{per}^1(S_N^{L_N}) \text{ such that :} \\ \quad \operatorname{div}(\varepsilon^{-1} \nabla u) + k_0^2 \mu u = 0 \quad \text{in } D_R \setminus \cup_{i=1}^N \overline{D_{\rho_i}} \\ \quad \partial_r u - \mathcal{S}u = g^{\text{inc}} \quad \text{on } \partial D_R \\ (\varepsilon^{-1} \partial_z \alpha_i \partial_z + \alpha_i^{-1} \partial_\theta \varepsilon^{-1} \partial_\theta) \check{u}_i + \alpha_i^{-1} e^{2z \alpha_i^{-1}} k_0^2 \mu \check{u}_i = 0 \quad \text{in } S_i^{L_i}, \quad i = 1, \dots, N \\ \quad \partial_z \check{u}(\ln \rho_i - L_i, \cdot) = 0, \quad i = 1, \dots, N \\ u(\rho_i, \cdot) = \check{u}_i(\ln \rho_i, \cdot), \quad \rho_i \partial_r u(\rho_i, \cdot) = \partial_z \check{u}_i(\ln \rho_i, \cdot), \quad i = 1, \dots, N. \end{array} \right. \quad (3.40)$$

In (3.40) for  $i = 1, \dots, N$ ,  $D_{\rho_i}$  is a small disk around  $\mathbf{c}_i$  of radius  $\rho_i$  while  $S_i^{L_i} := (\ln \rho - L_i; \ln \rho_i) \times (-\pi; \pi)$  with  $L_i > 0$  (see Figure 3.10). For each PML, we use a parameter  $\alpha_i$  as in (3.35).

### 3.4.4 Numerical experiments

#### Numerical results with the PML approach

We present some results obtained with the analogous of Formulation (3.39) for Problem (3.40). We consider the same setting as in the beginning of §3.4. We choose PML coefficients such that  $\alpha_1 = e^{-i2\pi/25}$  (top corner) and  $\alpha_2 = \alpha_3 = e^{-i2\pi/33}$  (bottom corners). We consider an incident field of incidence  $\alpha^{\text{inc}} = -\pi/12$ . In Figure 3.11, we observe that the numerical solution seems to converge when we refine the mesh, contrary to what happens without the PMLs (see Figure 3.6). In Figure 3.12, we display the field inside the PMLs. We note that it is correctly attenuated and that at the end of the PMLs, the solution seems constant. According to Table 3.1, for  $\kappa_\varepsilon = -1.1838$ , the outgoing singularity at each corner is skew-symmetric with respect to the corner's bisectors. This is indeed the case. For this particular incidence, at the bottom right corner the solution is locally symmetric (with respect to the corner's bisector) and there is no excitation of the outgoing singularity.

#### Energy conservation

In this section, we wish to give numerical illustrations of the energy balance  $J_{\text{ext}} = \sum_n J_n$  obtained in (3.34). Using (3.7) (3.31) and (3.34) we find

$$J_{\text{ext}} = \Im \left( \int_{\partial D_R} \varepsilon_d^{-1} (\mathcal{S}(u - u^{\text{inc}}) + \partial_r u^{\text{inc}}) \bar{u} d\sigma \right) \quad \text{and} \quad J_n = -\eta_n |b_n|^2 \left| \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon^{-1} \Phi_n^2 d\theta_n \right|, \quad (3.41)$$

where  $\mathcal{S}$  is the Dirichlet-to-Neumann map on  $\partial D_R$ . To assess the term  $J_n$ , the energy trapped at the corner  $\mathbf{c}_n$ , we have to derive formulae to compute the coefficient  $b_n$ . There are two different approaches to do that. Let us present the two methods when the interface has only one corner  $\mathbf{c}$ .

★ By definition,  $u$  admits the expansion  $u = bs^{\text{out}} + \tilde{u}$  where  $b \in \mathbb{C}$  and  $\tilde{u} \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^2)$ . This yields

$$\int_{\partial D_\rho} \varepsilon^{-1} u \overline{s^{\text{out}}} d\sigma = b \int_{\partial D_\rho} \varepsilon^{-1} s^{\text{out}} \overline{s^{\text{out}}} d\sigma + \int_{\partial D_\rho} \varepsilon^{-1} \tilde{u} \overline{s^{\text{out}}} d\sigma.$$

Proceeding as in §3.6.3, one finds that  $|\int_{\partial D_\rho} \varepsilon^{-1} \tilde{u} \overline{s^{\text{out}}} d\sigma| \leq C\rho^\beta$  for some  $\beta > 0$ . We deduce

$$b = \frac{\rho^{-\lambda^{\text{out}}} \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon^{-1} u(\rho, \cdot) \Phi d\theta}{\int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon^{-1} \Phi^2 d\theta} + O(\rho^\beta). \quad (3.42)$$

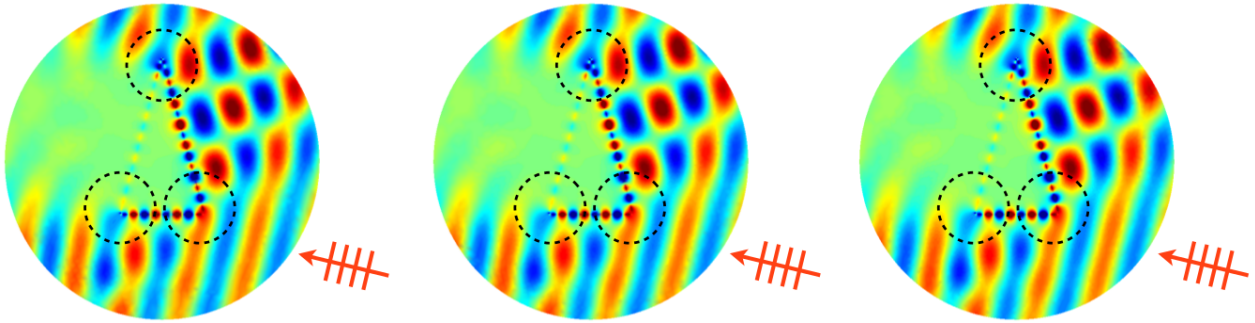


Figure 3.11: Numerical solution in  $D_R$  for  $\omega = 9$  PHZ ( $\kappa_\varepsilon = -1.1838$ ). We reconstitute the field inside the three disks using the transform  $(z, \theta) \mapsto (e^z, \theta)$ . As we refine the mesh (from left to right), the solution does not change much.

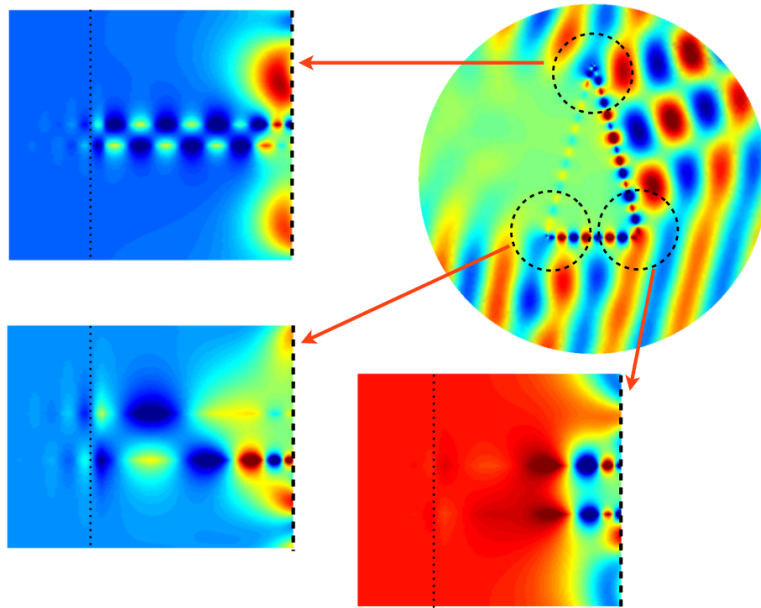


Figure 3.12: Numerical solution in  $D_R$  with PMLs for  $\omega = 9$  PHZ ( $\kappa_\varepsilon = -1.1838$ ). The bold dashed lines correspond to the interfaces where matching is made, the small dotted lines represent the boundary of the PMLs. Note that for the chosen incidence  $\alpha^{\text{inc}} = -\pi/12$  ( $330^\circ$ ), there is no trapped energy at the right corner (see also Figure 3.13).

In (3.42)  $\lambda^{\text{out}}$  denotes the singular exponent of  $s^{\text{out}}$  defined in Table 3.1. Note that according to Lemma 3.4, we know that the denominator of the above equation does not vanish.

★ Let us present another approach to assess the coefficient  $b$ . We follow a classical idea to compute stress intensity factors. First, introduce  $\mathfrak{s}$  the solution to the following problem:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Find } \mathfrak{s} = \zeta s^{\text{in}} + c s^{\text{out}} + \tilde{\mathfrak{s}}, \text{ with } c \in \mathbb{C} \text{ and } \tilde{\mathfrak{s}} \in H^1(D_R), \text{ such that:} \\ \text{div}(\varepsilon^{-1} \nabla \mathfrak{s}) + k_0^2 \mu \mathfrak{s} = 0 \text{ in } D_R, \\ \partial_r \mathfrak{s} - \mathcal{S} \mathfrak{s} = 0 \text{ on } \partial D_R. \end{array} \right. \quad (3.43)$$

In (3.43)  $\zeta$  is a given cut-off function such that  $\zeta = 1$  in a neighbourhood of  $\mathbf{c}$  and such that  $\text{div}(\varepsilon^{-1} \nabla s^{\text{in}}) = 0$  on the support of  $\zeta$ . Looking for a solution  $\mathfrak{s}$  of (3.43) is equivalent to look for

$w = \mathfrak{s} - \zeta s^{\text{in}}$  solution of

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\varepsilon^{-1} \nabla w) + k_0^2 \mu w &= f_1^{\text{in}} := -(\operatorname{div}(\varepsilon^{-1} \nabla(\zeta s^{\text{in}})) + k_0^2 \mu(\zeta s^{\text{in}})) & \text{in } D_R, \\ \partial_r w - \mathcal{S}w &= f_2^{\text{in}} := -(\partial_r(\zeta s^{\text{in}}) - \mathcal{S}(\zeta s^{\text{in}})) & \text{on } \partial D_R. \end{cases} \quad (3.44)$$

Using Remark 3.3, one can easily prove that Problem (3.44) has a unique solution. Solving (3.44) consists in solving (3.7) with a source that, instead of coming from the exterior domain, comes from the corner. Now, if  $u = bs^{\text{out}} + \tilde{u}$  with  $b \in \mathbb{C}$ ,  $\tilde{u} \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^2)$  is a solution of (3.6), by Green's formula we get

$$\int_{\partial D_R} \varepsilon^{-1} (\partial_r u \mathfrak{s} - \partial_r \mathfrak{s} u) d\sigma - \int_{\partial D_\rho} \varepsilon^{-1} (\partial_r u \mathfrak{s} - \partial_r \mathfrak{s} u) d\sigma = 0. \quad (3.45)$$

Proceeding again as in §3.6.3, one finds

$$\int_{\partial D_\rho} \varepsilon^{-1} (\partial_r u \mathfrak{s} - \partial_r \mathfrak{s} u) d\sigma = 2b \lambda^{\text{out}} \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon^{-1} \Phi^2 d\theta + O(\rho^\beta) \quad \text{for some } \beta > 0. \quad (3.46)$$

On the other hand, we have  $\int_{\partial D_R} \varepsilon^{-1} (\partial_r u \mathfrak{s} - \partial_r \mathfrak{s} u) d\sigma = \int_{\partial D_R} \varepsilon_d^{-1} g^{\text{inc}} \mathfrak{s} d\sigma$  (use (3.8) and the properties of the Hankel functions to obtain this). Plug the latter identity and (3.46) in (3.45). Then take the limit as  $\rho \rightarrow 0$ . We obtain

$$b = \frac{\int_{\partial D_R} \varepsilon_d^{-1} g^{\text{inc}} \mathfrak{s} d\sigma}{2\lambda^{\text{out}} \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon^{-1} \Phi^2 d\theta}.$$

The advantage of the second approach is twofold. First, it does not require to compute the solution  $u$ . The function  $\mathfrak{s}$  can be approximated once for all, independently from the source term. Moreover, numerically, the second method is more accurate than the first one.

Let us turn to numerical simulations. We compute the terms  $J_{\text{ext}}$ ,  $J_n$  (see (3.41)) for  $\alpha^{\text{inc}} \in [0; 2\pi)$ . We perform two series of experiments: one with  $\omega = 9$  PHz ( $\kappa_\varepsilon = -1.1838$ ), another with  $\omega = 11$  PHz ( $\kappa_\varepsilon = -0.4619$ ). For the latter case, according to Table 3.1 and §3.4.2, we have to change the PML coefficients. We take  $\alpha_1 = e^{i2\pi/25}$  (top corner) and  $\alpha_2 = \alpha_3 = e^{i2\pi/33}$  (bottom corners). All the other parameters are set as previously (see the beginning of (3.4)).

In Figure 3.13, we work with  $\omega = 9$  PHz ( $\kappa_\varepsilon = -1.1838$ ). We observe that the energy balance (3.41) seems to be satisfied. There is a small mismatch between  $J_{\text{ext}}$  and  $\sum_n J_n$ . Probably, this is because we use the first method described above to assess the coefficients  $b_n$  appearing in the definition of  $J_n$ . Remark that due to the symmetry of the geometry, the results are symmetric (the left and right corners play a similar role). One notice that for  $\alpha^{\text{inc}} = \pm\pi/2$  ( $90^\circ$  and  $270^\circ$ ), there is no trapped energy at the top corner. This was expected. Indeed, for this setting, according to Table 3.1, we know that the black-hole singularities are skew-symmetric with respect to the bisector of  $\mathbf{c}_n$ . But for these two particular incidences,  $u^{\text{inc}}$  is symmetric with respect to the top corner's bisector. As a consequence, there is no excitation of the outgoing singularity. The same phenomenon occurs for the other corners when  $\alpha^{\text{inc}}$  corresponds to the direction of the bisector of  $\mathbf{c}_n$ .

In Figure 3.14, we work with  $\omega = 11$  PHz ( $\kappa_\varepsilon = -0.4619$ ). When  $\kappa_\varepsilon > -1$ , according to Table 3.1, the black-hole waves are symmetric. This explains why this time, we observe that the energy trapped at the corner  $\mathbf{c}_n$  ( $n = 1, 2, 3$ ) is maximum when  $\alpha^{\text{inc}}$  coincides with the direction of the bisector of  $\mathbf{c}_n$ .

### 3.5 Discussion and prospects

Let us conclude this paper by making some comments regarding this new numerical method:

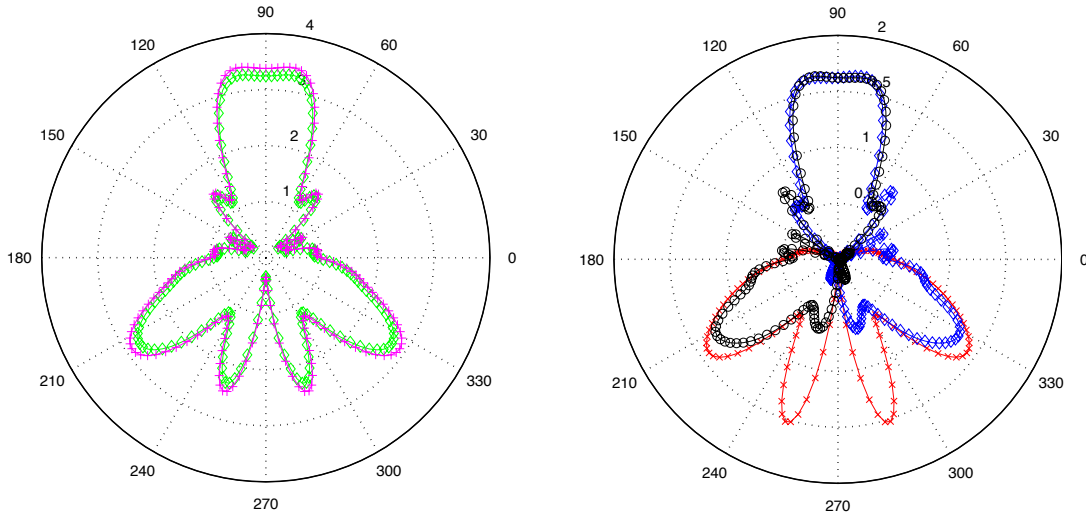


Figure 3.13: Left: sum of the energy fluxes at the corners (diamond) and energy flux through  $\partial D_R$  (cross) with respect to  $\alpha^{\text{inc}} \in [0; 2\pi)$  in polar coordinates. Right: energy flux at the top corner (cross), left corner (diamond), right corner (circle) in polar coordinates. The frequency is set to  $\omega = 9$  PHz ( $\kappa_\varepsilon = -1.1838$ ).

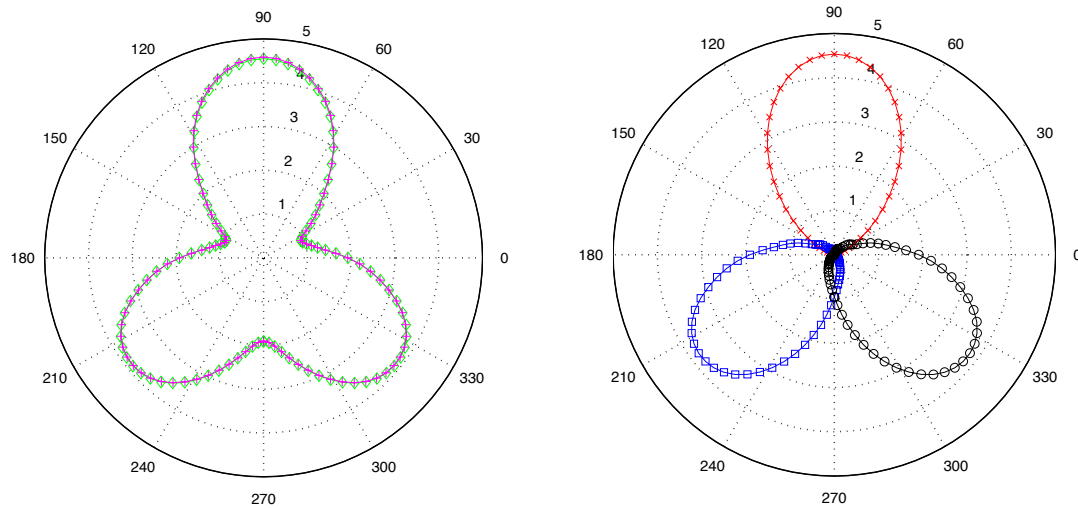


Figure 3.14: Left: sum of the energy fluxes at the corners (diamond) and energy flux through  $\partial D_R$  (cross) with respect to  $\alpha^{\text{inc}} \in [0; 2\pi)$  in polar coordinates. Right: energy flux at the top corner (cross), left corner (square), right corner (circle) in polar coordinates. The frequency is set to  $\omega = 11$  PHz ( $\kappa_\varepsilon = -0.4619$ ).

- We point out that the method with PMLs at the corners is also interesting when the metal is slightly absorbing. In this case, the scattering problem is well-posed in the usual  $H^1$  framework like when the contrast  $\kappa_\varepsilon$  lies outside the critical interval. This is due to the fact that there is no oscillating singularities. However, when the dissipation is small, the field can be very singular (according to Proposition 3.3, we have  $\lim_{\gamma \rightarrow 0} s^\gamma = s^{\text{out}}$  where  $\gamma$  corresponds to the dissipation). As a consequence, it is necessary to use a very refined mesh to obtain a good approximation of the solution. Adding some PMLs at the corners allows to attenuate the singularities without producing spurious reflections. In Figure 3.15, we use the lossy Drude’s model (see (3.2)) at the frequency  $\omega = 6$  PHz for silver. It

provides  $\varepsilon_m^\gamma(\omega) = -3.9193 + 0.0926i$ . We set the other parameters as previously (with PML coefficients as in the case  $\omega = 9$  PHz). We observe that when the mesh is refined, the numerical solution is more stable with PMLs than without. Note that instabilities with respect to dissipation have been already pointed out in [73].

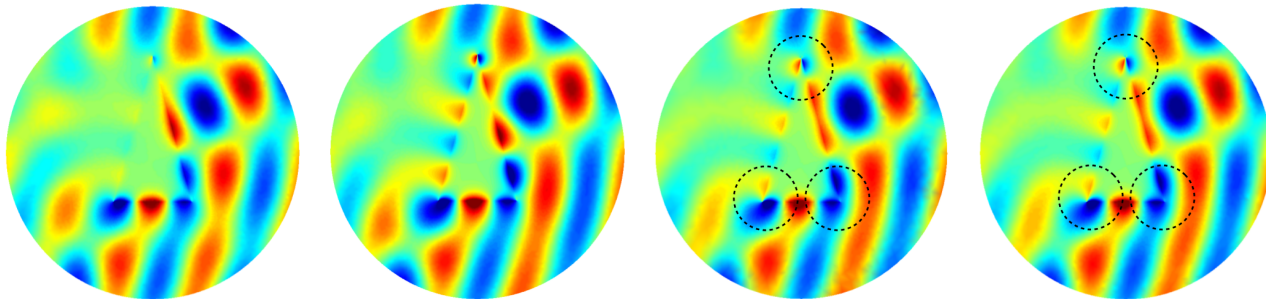


Figure 3.15: Left (resp. middle-left): solution for a standard (resp. refined) mesh without PMLs. Middle-right (resp. right): solution for a standard (resp. refined) mesh with PMLs.

- In practice, the technique with PMLs turns out to be very efficient to obtain a good approximation of the plasmonic waves propagating at the interface. Concerning the justification of the method, several questions remain open. First, one needs to control the error made when truncating the PMLs. This is not straightforward because of the change of sign of  $\varepsilon$ . However, using Kondratiev spaces and working for example like in [80], one can reasonably hope to establish such result. The problem of the justification of the convergence of the finite element methods seems more intricate. Without PMLs, the existing proofs (with sign-changing  $\varepsilon$ ) require assumptions on meshes (see [40, 13]) and the question of knowing whether or not these assumptions are necessary is not solved. Here, due to the complex scaling  $z \mapsto z/\alpha$  of the PMLs, it is not even clear that the continuous problem admits a unique solution.
- Let us mention that analogous results to those obtained with the method involving PMLs should be obtained with the singular complement method [47, 48], using the characterization of the black-hole singularities and the computation of the coefficient  $b$ .

## 3.6 Annex

### 3.6.1 Proof of Proposition 3.2

We reproduce a calculus which can be found in [56] or [38, Proposition 3.2.8]. Classically, one can show that  $\Phi$  is an eigenfunction associated with the eigenvalue  $\lambda \in \Lambda_{\text{sym}}$  (resp.  $\lambda \in \Lambda_{\text{skew}}$ ) for (3.20) if and only if it verifies the transmission problem:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\lambda^2 + \partial_\theta^2)\Phi = 0 \quad \text{on } (0; \phi/2) \\ (\lambda^2 + \partial_\theta^2)\Phi = 0 \quad \text{on } (\phi/2; \pi) \\ \Phi(\phi^-/2) = \Phi(\phi^+/2), \quad \varepsilon_m^{-1}\partial_\theta\Phi(\phi^-/2) = \varepsilon_d^{-1}\partial_\theta\Phi(\phi^+/2) \\ \partial_\theta\Phi(0) = \partial_\theta\Phi(\pi) = 0 \quad (\text{resp. } \Phi(0) = \Phi(\pi) = 0) \\ \Phi(\theta) = \Phi(-\theta) \quad (\text{resp. } \Phi(\theta) = -\Phi(-\theta)) \quad \text{on } (-\pi; 0). \end{array} \right.$$

Looking for solutions under the form

$$\begin{array}{l} \Phi(\theta) = A \cos(\lambda\theta) \quad \text{on } (0; \phi/2) \quad \text{and} \quad \Phi(\theta) = B \cos(\lambda(\theta - \pi)) \quad \text{on } (\phi/2; \pi), \\ (\text{ resp. } \Phi(\theta) = C \sin(\lambda\theta) \quad \text{on } (0; \phi/2) \quad \text{and} \quad \Phi(\theta) = D \sin(\lambda(\theta - \pi)) \quad \text{on } (\phi/2; \pi) ), \end{array}$$

where  $(A, B) \neq (0, 0)$ ,  $(C, D) \neq (0, 0)$  are some constants, we obtain that  $\lambda$  belongs to  $\Lambda \setminus \{0\}$  if and only if it satisfies

$$\kappa_\varepsilon^{-1} \tan(\lambda\phi/2) = \tan(\lambda(\phi/2 - \pi)) \quad (\text{resp. } \kappa_\varepsilon \tan(\lambda\phi/2) = \tan(\lambda(\phi/2 - \pi))).$$

### 3.6.2 Proof of Lemma 3.4

The next lemma is a technical result needed in the selection of the outgoing solution (see §3.3.3).

**Lemma 3.4.** *Assume that  $\kappa_\varepsilon \in (-b_\Sigma; -1/b_\Sigma) \setminus \{-1\}$ . Let  $(\pm i\eta, \Phi)$  be a solution of (3.20), with  $\Phi$  equal to (3.22) or (3.23) according to the situation. Then we have*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon^{-1} \Phi^2 d\theta > 0 \quad \text{if } \kappa_\varepsilon \in (-b_\Sigma; -1) \quad \text{and} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon^{-1} \Phi^2 d\theta < 0 \quad \text{if } \kappa_\varepsilon \in (-1; -1/b_\Sigma).$$

*Proof.* Set  $\aleph_m := \int_{|\theta| < \phi/2} \Phi^2 d\theta$  and  $\aleph_d := \int_{\phi/2 < |\theta| < \pi} \Phi^2 d\theta$ .

★ Pick some  $\kappa_\varepsilon \in (-b_\Sigma; -1)$ . We want to show that  $\varepsilon_m^{-1} \aleph_m + \varepsilon_d^{-1} \aleph_d > 0$ . Since  $\varepsilon_m^{-1} \aleph_m + \varepsilon_d^{-1} \aleph_d = \varepsilon_m^{-1} (\aleph_m + \kappa_\varepsilon \aleph_d) > \varepsilon_m^{-1} (\aleph_m - \aleph_d)$ , it is enough to prove that  $\aleph_m - \aleph_d < 0$ .

- First, assume that  $0 < \phi < \pi$ . Explicit calculus using the expression of  $\Phi$  given by (3.22) yields

$$\aleph_m = \frac{\sinh(\eta\phi) - (\eta\phi)}{\eta(\cosh(\eta\phi) - 1)} \quad \text{and} \quad \aleph_d = \frac{\sinh(\eta(2\pi - \phi)) - (\eta(2\pi - \phi))}{\eta(\cosh(\eta(2\pi - \phi)) - 1)}.$$

Define  $h(t) := (\sinh t - t)/(\cosh t - 1)$ . We have  $\eta(\aleph_m - \aleph_d) = h(\eta\phi) - h(\eta(2\pi - \phi))$ , so it is sufficient to show that  $h$  is an increasing function on  $(0; +\infty)$ . One computes  $h'(t) = (2 - 2 \cosh t + t \sinh t)/(\cosh t - 1)^2$ . Define  $g(t) = 2 - 2 \cosh t + t \sinh t$ . One finds  $g'(t) = -\sinh t + t \cosh t$  and  $g''(t) = t \sinh t$ . One deduces, successively,  $g' > 0$  and  $h' > 0$ . Thus  $h$  is indeed an increasing function on  $(0; +\infty)$ .

- When  $\pi < \phi < 2\pi$ , using the expression (3.23), one finds

$$\aleph_m = \frac{\sinh(\eta\phi) + (\eta\phi)}{\eta(\cosh(\eta\phi) + 1)} \quad \text{and} \quad \aleph_d = \frac{\sinh(\eta(2\pi - \phi)) + (\eta(2\pi - \phi))}{\eta(\cosh(\eta(2\pi - \phi)) + 1)}.$$

Introduce  $\hat{h}(t) := (\sinh t + t)/(\cosh t + 1)$ . We have  $\eta(\aleph_m - \aleph_d) = \hat{h}(\eta\phi) - \hat{h}(\eta(2\pi - \phi))$ , so it is sufficient to prove that  $\hat{h}$  is a decreasing function on  $(0; +\infty)$ . One computes  $\hat{h}'(t) = (2 + 2 \cosh t - t \sinh t)/(\cosh t + 1)^2$ . Define  $\hat{g}(t) = 2 + 2 \cosh t - t \sinh t$ . One finds  $\hat{g}'(t) = \sinh t - t \cosh t$  and  $\hat{g}''(t) = -t \sinh t$ . One deduces, successively,  $\hat{g}' < 0$  and  $\hat{h}' < 0$ . Thus  $\hat{h}$  is indeed a decreasing function on  $(0; +\infty)$ .

★ The same approach, *mutatis mutandis*, shows that  $\int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon^{-1} \Phi^2 d\theta < 0$  when  $\kappa_\varepsilon \in (-1; -1/b_\Sigma)$ .  $\square$

### 3.6.3 Details of the proof of Lemma 3.3

Let  $u = b s^{\text{out}} + \tilde{u}$ , with  $b \in \mathbb{C}$ ,  $\tilde{u} \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^2)$ , be a solution of (3.7). Lemma 3.4 and (3.28) yield

$$\Im m \left( \int_{\partial D_\rho} \varepsilon^{-1} \partial_r u \bar{u} d\sigma \right) = -|b|^2 \eta \left| \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon^{-1} \Phi^2 d\theta \right| + \Im m \left( \int_{\partial D_\rho} \varepsilon^{-1} (b \partial_r s^{\text{out}} \bar{\tilde{u}} + \bar{b} \partial_r \tilde{u} \overline{s^{\text{out}}} + \partial_r \tilde{u} \bar{\tilde{u}}) d\sigma \right).$$

To obtain the result of Lemma 3.3, we need to show that the second term of the right hand side of the above equation tends to zero as  $\rho \rightarrow 0$ . To proceed, let us establish for example that

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\partial D_\rho} \varepsilon^{-1} \partial_r s^{\text{out}} \bar{\tilde{u}} d\sigma = 0, \quad (3.47)$$

the other terms being handled in the same way. Using Green's formula, we would like to write

$$\int_{\partial D_\rho} \varepsilon^{-1} \partial_r s^{\text{out}} \bar{u} \, d\sigma = \int_{D_\rho} \varepsilon^{-1} \nabla s^{\text{out}} \cdot \bar{\nabla} \bar{u} \, d\mathbf{x}. \quad (3.48)$$

The difficulty here is that  $s^{\text{out}} \notin H^1(D_\rho)$ . But we can prove [86, 18] that  $\tilde{u}$  has more regularity than  $H^1$  regularity. More precisely, the behaviour of  $\tilde{u}$  at the corner is driven by the less regular singularity associated with singular exponents  $\lambda$  such that  $\Re \lambda > 0$ . Set

$$\beta_0 := \min\{\Re \lambda \mid \lambda \in \Lambda \text{ and } \Re \lambda > 0\}.$$

We can show that  $r^{-\beta} \nabla \tilde{u} \in L^2(D_R)$  for  $\beta < \beta_0$  (see [18]) which implies, for all  $0 < \beta < \beta_0$ ,

$$\left| \int_{D_\rho} \varepsilon^{-1} \nabla s^{\text{out}} \cdot \bar{\nabla} \bar{u} \, d\mathbf{x} \right| \leq C \left( \int_{D_\rho} r^{2\beta} |\nabla s^{\text{out}}|^2 \, d\mathbf{x} \right)^{1/2} \left( \int_{D_\rho} r^{-2\beta} |\nabla \tilde{u}|^2 \, d\mathbf{x} \right)^{1/2}. \quad (3.49)$$

Since there holds,

$$\int_{D_\rho} r^{2\beta} |\nabla s^{\text{out}}|^2 \, d\mathbf{x} \leq \rho^\beta \int_{D_\rho} r^\beta |\nabla s^{\text{out}}|^2 \, d\mathbf{x} \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0,$$

combining (3.48)–(3.49) yields to (3.47).

## 3.A Some extensions

### 3.A.1 A more general proof of proposition 3.3

We propose another proof of proposition 3.3 which is more general, using an asymptotic (Taylor) expansion of the singular exponent, and which directly makes the link between the absorption and the energy considerations.

Let us start by defining the permittivity  $\varepsilon^\gamma$ , by making an asymptotic expansion of the permittivity with respect to  $\gamma$ . We consider the lossy Drude model (3.2) for the relative permittivity of the metal:

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\omega\gamma},$$

Since  $\gamma \ll \omega$ , the Taylor expansion of the relative permittivity gives us

$$\varepsilon(\omega) = \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \left( 1 - i \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega^2} \gamma \right) + o\left(\frac{\gamma}{\omega}\right),$$

then we define

$$\widehat{\varepsilon}(\omega) = \frac{\omega_p^2}{\omega_p^2 - \omega^2} > 0 \quad \text{and} \quad \varepsilon^\gamma = \begin{cases} \varepsilon_d & \text{in } \Omega_d \\ \varepsilon_m^\gamma = \varepsilon_m (1 - i\widehat{\varepsilon}(\omega)\gamma) & \text{in } \Omega_m, \end{cases}$$

where  $\varepsilon_m = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} < 0$  is the permittivity obtained with the non lossy Drude model.

**Proposition 3.3.** *Assume that  $\kappa_\varepsilon \in (-b_\Sigma; -1/b_\Sigma) \setminus \{-1\}$ . If  $0 < \phi_1 < \pi$ , then  $s^{\text{out}} = s^-$ . If  $\pi < \phi_1 < 2\pi$ , then  $s^{\text{out}} = s^+$ .*



*Proof.* Let us compute an asymptotic (or Taylor) expansion of  $\lambda^\gamma$ , the singular exponent of smallest positive real part of  $\Lambda^\gamma$ , as  $\gamma$  tends to zero. By definition of  $\Lambda^\gamma$ , if  $\Phi^\gamma$  is an eigenfunction associated with  $\lambda^\gamma$ , we have

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \frac{d\Phi^\gamma}{d\theta} \frac{d\Psi}{d\theta} d\theta = (\lambda^\gamma)^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \Phi^\gamma \Psi d\theta, \quad \forall \Psi \in H_{\text{per}}^1((-\pi; \pi)), \quad (3.50)$$

where  $H_{\text{per}}^1(-\pi; \pi)$  denotes the function space of functions  $\Psi \in H^1((-\pi, \pi))$  that are  $2\pi$ -periodic. We make the simple expansion

$$\lambda^\gamma = \lambda + \gamma \hat{\lambda} + \dots \quad \text{and} \quad \Phi^\gamma = \Phi + \gamma \hat{\Phi} + \dots, \quad (3.51)$$

where the terms  $\lambda$ ,  $\hat{\lambda}$ ,  $\Phi$ ,  $\hat{\Phi}$  have to be determined and where the dots stand for higher order terms not important in our analysis (what we want to know is the sign of  $\Re \hat{\lambda}$  according to (??) and the limit of  $s^\gamma$ ). Plugging (3.51) in (3.50), we get  $\forall \Psi \in H_{\text{per}}^1((-\pi; \pi))$

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon^{-1} \frac{d\Phi}{d\theta} \frac{d\Psi}{d\theta} d\theta + \gamma \left[ \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon^{-1} \frac{d\hat{\Phi}}{d\theta} \frac{d\Psi}{d\theta} d\theta + i\hat{\varepsilon}(\omega) \varepsilon_m^{-1} \int_{\mathbb{T}_m} \frac{d\Phi}{d\theta} \frac{d\Psi}{d\theta} d\theta \right] + \dots \\ & = \lambda^2 \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon^{-1} \Phi \Psi d\theta + \gamma \left[ \lambda^2 \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon^{-1} \hat{\Phi} \Psi d\theta + i\hat{\varepsilon}(\omega) \varepsilon_m^{-1} \lambda^2 \int_{\mathbb{T}_m} \Phi \Psi d\theta + 2\hat{\lambda} \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon^{-1} \Phi \Psi d\theta \right] + \dots \end{aligned} \quad (3.52)$$

In (3.52),  $\mathbb{T}_m := (-\phi/2; \phi/2)$  denotes the angular coordinates that lie in the metal region. Collecting the terms of order zero in  $\gamma$  in (3.52), unsurprisingly, we get that  $(\lambda, \Phi)$  is solution of (3.20) without dissipation. Gathering the terms of order one in  $\gamma$  in (3.52), we obtain the relation

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon^{-1} \frac{d\hat{\Phi}}{d\theta} \frac{d\Psi}{d\theta} d\theta - \lambda^2 \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon^{-1} \hat{\Phi} \Psi d\theta \\ & = -i\hat{\varepsilon}(\omega) \varepsilon_m^{-1} \left[ \int_{\mathbb{T}_m} \frac{d\Phi}{d\theta} \frac{d\Psi}{d\theta} d\theta - \lambda^2 \int_{\mathbb{T}_m} \Phi \Psi d\theta \right] + 2\hat{\lambda} \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon^{-1} \Phi \Psi d\theta, \quad \forall \Psi \in H_{\text{per}}^1((-\pi; \pi)). \end{aligned} \quad (3.53)$$

Taking  $\Psi = \Phi$  in (3.53) and using the zero order in  $\gamma$  equation, we deduce that we must have

$$2\hat{\lambda} \lambda \int_0^{2\pi} \varepsilon^{-1} (\Phi)^2 d\theta = \frac{-i\hat{\varepsilon}(\omega)}{|\varepsilon_m|} \int_{\mathbb{T}_m} \left( \left( \frac{d\Phi}{d\theta} \right)^2 - \lambda^2 (\Phi)^2 \right) d\theta. \quad (3.54)$$

To find  $s^{\text{out}}$ , let us apply (3.54) to  $\lambda_\pm^\gamma \in \Lambda^\gamma$  the singular exponent whose asymptotic expansion coincides at zero order with  $\pm i\eta$ . Introduce  $\hat{\lambda}_\pm$  such that  $\lambda_\pm^\gamma = \pm i\eta + \gamma \hat{\lambda}_\pm + \dots$ . Then we have

$$\hat{\lambda}_\pm \eta \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon^{-1} (\Phi)^2 d\theta = \frac{\mp \hat{\varepsilon}(\omega)}{2|\varepsilon_m|} \int_{\mathbb{T}_m} \left( \left( \frac{d\Phi}{d\theta} \right)^2 + \eta^2 (\Phi)^2 \right) d\theta.$$

By definition  $\eta > 0$  (see lemma 3.2 we deduce that  $\hat{\lambda}_\pm$  are real valued,  $\hat{\lambda}_+ = -\hat{\lambda}_-$  and  $\hat{\lambda}_+ \int_0^{2\pi} \varepsilon^{-1} \Phi^2 d\theta < 0$ ). Then lemma 3.4 let us conclude that when  $0 < \phi_1 < \pi$ ,  $\hat{\lambda}_+$  (resp.  $\hat{\lambda}_-$ ) is negative (resp. positive). Thus, for  $\gamma$  small enough, we have  $\Re \lambda_+^\gamma < 0$  and  $\Re \lambda_-^\gamma > 0$ . We conclude that we must choose  $s^{\text{out}} = s^-$ . Conversely, when  $\pi < \phi_1 < 2\pi$ , there hold  $\hat{\lambda}_+ > 0$  and  $\hat{\lambda}_- < 0$  which leads to take  $s^{\text{out}} = s^+$ . Note that the asymptotic expansion (3.51) can be rigorously justified by means of classical theorems for operators depending analytically on a parameter (see [81]).  $\square$

### 3.A.2 The particularity of the electrostatic like case

In this section we wish to compare the results obtained to characterize coupled plasmons in section 1.2.3 of the particular "static" like case and the oscillating singularities of section 3.3.1. The conclusions are twofold: first when the interface has one corner, one can interpret the solution near the corner as coupled plasmons in planar (bounded) waveguide using the change of variables  $(r, \theta) \rightarrow (z = \ln r, \theta)$ , second the oscillating singularities are solutions of the electrostatic like equation leading to the break the symmetry of behavior (the modes are only symmetric or skew-symmetric).

In this chapter we have characterized the oscillating plasmonic singularities at the corners by zooming at the corners (that is neglecting the term  $k_0^2 \mu r^2 u$ ) so that the singular behavior is driven by the solutions of the electrostatic like equation, for which separation of variables is possible. Then thanks to the change of variables  $(r, \theta) \rightarrow (z = \ln r, \theta)$ , one can work in a waveguide setting so that in fact one looks for the solutions  $\check{s}(z, \theta) = e^{\lambda z} \Phi(\theta)$  such that:

$$\operatorname{div}(\varepsilon^{-1} \nabla \check{s}) = 0 \quad \text{in } S_\rho.$$

We recall that  $S_\rho$  is a bounded waveguide with periodic conditions. When  $\kappa_\varepsilon \in I_c$ , the oscillating singularities are given by  $\check{s}^\pm(z, \theta) = e^{\pm i \eta z} \Phi(\theta)$ , where  $\Phi$  is a  $2\pi$ -periodic function given by (3.22)-(3.23), which satisfies

$$d_\theta(\varepsilon^{-1} d_\theta \Phi) - \eta^2 \varepsilon^{-1} \Phi = 0 \quad (-\pi; \pi).$$

Using section 3.6.1 such solution exists by solving the zeros of the functions  $f^\pm$ , namely by solving the dispersion relations

$$\tanh(bt) = \kappa_\varepsilon^{\pm 1} \tanh(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \text{with } b = \frac{2\pi - \phi}{\phi}.$$

Thanks to this change of variables, these solutions can be interpreted as coupled surface plasmons since they are propagating in the direction of propagation  $z$  while they are exponentially decreasing in the transverse direction (see (3.22)-(3.23)), plus depending on the contrast the modes are only symmetric or skew-symmetric with respect to the bisector of the corner angle.

In chapter 1, an analogous dispersion relation had to be solved to find the coupled plasmonic waves in a dielectric-metal-dielectric (or metal-dielectric-metal) unbounded waveguide. In section 1.2.3, in particular we have seen that the solutions  $u(x, y) = e^{i\beta x} u(y)$  of the electrostatic like equation satisfy

$$d_y(\varepsilon^{-1} d_y u) - \beta^2 \varepsilon^{-1} u = 0 \quad \mathbb{R},$$

and such solution exists by solving the relation dispersions

$$\tanh(\beta a) = |\kappa_\varepsilon^{\pm 1}|,$$

where  $a$  denotes the thickness of the sandwiched material.

One can check that the results obtained in this chapter are in accordance with the ones of the "electrostatic case" in section 1.2.3, in the sense that when  $\kappa_\varepsilon < -1$  the coupled modes are only skew-symmetric whereas when  $\kappa_\varepsilon > -1$  the modes are only symmetric. The only difference lies in the expression of  $\Phi(\theta)$  and  $u(y)$ .

This result illustrates the particularity of the electrostatic like case, and its influence on the singular behavior of the solution near the corner.

## CHAPITRE

# 4

# GUIDE D'ONDES PLASMONIQUE SCALAIRE

## Sommaire

---

<b>Introduction . . . . .</b>	<b>95</b>
<b>4.1 Cadre général : le guide fermé scalaire linéarisé . . . . .</b>	<b>97</b>
4.1.1 Présentation du problème . . . . .	97
4.1.2 Formulation d'un problème de valeurs propres . . . . .	98
4.1.3 Résultats préliminaires et formulation variationnelle . . . . .	99
<b>4.2 Cas d'un contraste hors intervalle critique . . . . .</b>	<b>101</b>
4.2.1 Caractère auto-adjoint et résolvante compacte . . . . .	101
4.2.2 Conséquences sur le spectre . . . . .	102
4.2.3 Localisation des modes . . . . .	103
4.2.4 Calcul des modes guidés et relation de dispersion . . . . .	106
<b>4.3 Analyse numérique hors intervalle critique : approximation par éléments finis des problèmes de valeurs propres avec changement de signe . . . . .</b>	<b>109</b>
4.3.1 Résultats sur l'approximation des opérateurs compacts (auto-adjoints) . . . . .	109
4.3.2 Approximation du problème de valeurs propres . . . . .	110
4.3.3 Illustrations numériques : modes d'une cavité et maillages T-conformes . . . . .	113
<b>4.4 Cas d'un contraste dans l'intervalle critique . . . . .</b>	<b>116</b>
4.4.1 Extension non auto-adjointe . . . . .	117
4.4.2 Bilan d'énergie : tri des valeurs propres dans le plan complexe . . . . .	119
<b>4.5 Approximation des valeurs propres pour un contraste dans l'intervalle critique . . . . .</b>	<b>121</b>
4.5.1 Formulation du problème de valeurs propres sur le domaine découpé . . . . .	123
4.5.2 Illustrations numériques . . . . .	124
4.5.3 Conservation de l'énergie . . . . .	125
<b>4.6 Retour au problème non linéaire . . . . .</b>	<b>126</b>
<b>4.7 Conclusion et perspectives . . . . .</b>	<b>129</b>
4.7.1 Des modes à fuite dans les coins? . . . . .	130
4.7.2 Le guide plasmonique ouvert . . . . .	132

---

## Introduction

Dans le chapitre 3 nous avons étudié un problème de diffraction 2D par une onde plane d'une inclusion métallique polygonale. Nous souhaitons dans ce chapitre aborder une autre principale application concernant ces ondes plasmoniques, à savoir le guidage des plasmons de surface (voir par exemple [125, 96, 10, 107, 36]).

Pour cela nous considérons un guide d'ondes plasmonique cylindrique  $D$ , composé d'un cylindre métallique de section polygonale (caractérisé par une permittivité  $\varepsilon = \varepsilon_m < 0$ ) entouré d'un diélectrique (avec  $\varepsilon = \varepsilon_d > 0$ ). Le but est d'en déterminer les modes guidés et de les calculer numériquement. Dans ce chapitre nous allons considérer un modèle simplifié, le guide plasmonique *scalaire*, c'est-à-dire gouverné par les équations

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\varepsilon \nabla u) + \omega^2 \mu u = 0 & \text{dans } D, \\ u = 0 & \text{sur } \partial D, \end{cases} \quad (4.1)$$

où  $u$  est l'inconnue,  $\omega > 0$  la fréquence, et  $\mu$  la perméabilité magnétique. Le guide plasmonique gouverné par les équations de Maxwell sera quant à lui étudié au chapitre 5. L'intérêt de ce modèle simplifié, bien qu'il ne découle pas directement des équations de Maxwell, est d'une part de nous servir d'étude préliminaire pour le chapitre 5, d'autre part de pouvoir utiliser directement les résultats des chapitres précédents. En effet, nous avons déjà étudié les équations (4.1) dans le cas bidimensionnel et nous savons d'ores et déjà que le changement de signe de la permittivité peut poser problème. Rappelons brièvement ce que nous avons vu

- ★ dans le chapitre 2 : nous avons étudié l'approximation d'un problème de transmission 2D du type

$$\begin{cases} \text{Pour } f \in V', \text{ trouver } u \in V \text{ tel que :} \\ \operatorname{div}(\varepsilon \nabla u) + \omega^2 \mu u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial \Omega, \end{cases} \quad (4.2)$$

où  $V$  est un espace fonctionnel (type  $H^1(\Omega)$ ) et  $V'$  son dual. D'abord nous avons établi que le problème (4.2) est bien posé au sens de Fredholm si et seulement si le contraste  $\kappa_\varepsilon := \varepsilon_m/\varepsilon_d$  n'appartient pas à un intervalle critique  $I_c$  dont les bornes dépendent de la géométrie de l'interface entre les deux milieux. Pour  $\kappa_\varepsilon \notin I_c$ , nous avons ensuite montré l'optimalité de l'approximation par des méthodes éléments finis dès lors que les maillages sont *localement T-conformes*.

- ★ dans le chapitre 3 : nous avons étudié un problème 2D de diffraction pouvant se résumer à un problème du type

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^2) \text{ tel que :} \\ \operatorname{div}(\varepsilon \nabla u) + \omega^2 \mu u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2, \\ + \text{ condition de radiation à l'infini.} \end{cases} \quad (4.3)$$

Dans ce cas nous avons établi le caractère bien posé de (4.3) sous les mêmes conditions qu'au chapitre 2, à savoir pour  $\kappa_\varepsilon \notin I_c$ . Lorsque  $\kappa_\varepsilon \in I_c$ , apparaissent des singularités aux coins (les ondes de trou noir) qui ne sont pas  $H^1$  aux coins. Il est nécessaire de les prendre en compte (et de changer de cadre fonctionnel) pour retrouver un problème bien posé. L'utilisation de PMLs aux coins permet numériquement de calculer la solution.

Pour étudier les modes guidés du guide d'ondes plasmonique scalaire, nous allons écrire (4.1) sous la forme d'un problème de théorie spectrale 2D dans la section du guide et déterminer le spectre de l'opérateur associé. La théorie des guides d'ondes scalaires (de section bornée ou non) est bien connue et a permis de comprendre la modélisation des fibres optiques et des lignes supraconductrices [11, 122, 27, 26, 23, 66, 25]. Nous nous inspirerons par ailleurs des travaux de [119] dans lesquels le problème spectral fait intervenir des coefficients changeant de signe dans la partie principale de

l'opérateur. Nous allons à nouveau distinguer deux cas : le cas  $\kappa_\varepsilon \notin I_c$  et le cas  $\kappa_\varepsilon \in I_c$ . Dans le premier cas nous allons établir le caractère auto-adjoint et à résolvante compacte de l'opérateur associé. Une fois ces propriétés établies, on souhaite approcher les valeurs propres de l'opérateur en utilisant les résultats du chapitre 2 : comment procéder et s'assurer de la convergence des méthodes numériques ? Dans le second cas, l'apparition des singularités de coins complique la chose, et l'opérateur n'est ni auto-adjoint ni à résolvante compacte. Quelle influence ont les ondes de trou noir sur les modes du guide ? Comment les prendre en compte dans le domaine de l'opérateur et comment procéder numériquement ? C'est ce que nous allons examiner en nous aidant des résultats du chapitre 3.

Le chapitre s'organise comme suit. Dans un premier temps nous posons le problème du guide d'ondes plasmonique *scalaire linéarisé* et nous le reformulons sous la forme d'un problème de valeurs propres. Nous étudions d'abord le cas "Hors Intervalle Critique", où nous montrons que l'opérateur est auto-adjoint et à résolvante compacte. Comme annoncé précédemment nous souhaitons approcher les valeurs propres par des méthodes éléments finis. Afin de pouvoir utiliser directement les résultats du chapitre 2, nous faisons le lien entre l'opérateur non borné du problème de valeurs propres, et celui vu chapitre 2. Le caractère compact nous permet de donner les estimations d'erreur d'approximation des valeurs propres en suivant les travaux d'Osborn [110, 4]. Nous présentons ensuite quelques résultats numériques mettant en évidence, comme au chapitre 2, l'importance des maillages localement T-conformes. Nous allons voir que les modes peuvent être confinés dans un des deux matériaux, ou être des modes d'interface. Nous abordons ensuite le cas "Dans l'Intervalle critique", pour lequel l'opérateur n'est ni auto-adjoint ni à résolvante compacte à cause de l'apparition des singularités aux coins (vues au chapitre 3). Il nous faut faire une extension de l'opérateur qui prend en compte ces singularités pour récupérer au moins le caractère discret du spectre, et trier dans le plan complexe les valeurs propres. Enfin nous verrons que la méthode numérique avec les PMLs permet également de calculer les modes du guide plasmonique.

Nous terminerons ce chapitre en revenant sur le problème de valeurs propres non linéaire, qui se pose lorsque l'on prend en compte le fait que le métal est un milieu dispersif. En guise d'ouverture, nous évoquerons aussi l'étude des modes plasmoniques guidés dans des structures non bornées.

## 4.1 Cadre général : le guide fermé scalaire linéarisé

### 4.1.1 Présentation du problème

On considère un ouvert  $D \subset \mathbb{R}^3$  invariant dans une direction, par exemple  $z : D := \{(x, y, z) \in \Omega \times \mathbb{R},$  et l'on considère la section  $\Omega$  bornée connexe à frontière lipschitzienne (*i.e.*  $\Omega$  est un domaine de  $\mathbb{R}^2$ ). De plus  $\bar{D} := \bar{D}_d \cup \bar{D}_m$ , où  $D_d := \Omega_d \times \mathbb{R}$  est un milieu homogène (diélectrique) et  $D_m := \Omega_m \times \mathbb{R}$  une inclusion métallique. Chaque milieu est caractérisé par les paramètres  $\mu_d > 0$ ,  $\varepsilon_d > 0$ , respectivement  $\mu_m > 0$  et  $\varepsilon_m < 0$ . On considère aussi que le milieu est non dissipatif, et l'on modélise la permittivité du métal avec le modèle de Drude simplifié (1.7) : c'est donc une fonction de la fréquence  $\omega$  et l'on se place dans la gamme de fréquences pour lesquelles  $\varepsilon_m(\omega) < 0$ . Enfin l'interface séparant les deux milieux est donnée par  $\Sigma \times \mathbb{R}$ , avec  $\Sigma := \bar{\Omega}_d \cap \bar{\Omega}_m$  (voir Figure 4.1). On définit les fonctions  $\varepsilon, \mu \in L^\infty(D)$  (ainsi que leurs inverses  $\varepsilon^{-1}, \mu^{-1} \in L^\infty(D)$ ),  $\varepsilon$  et  $\mu$  prenant respectivement les valeurs  $\varepsilon_d, \mu_d$  dans  $D_d$  et  $\varepsilon_m(\omega), \mu_m$  dans  $D_m$ . Ces fonctions ne dépendent pas de  $z$  et nous les noterons de la même façon lorsque nous travaillerons dans la section  $\Omega$ .

On se place en régime harmonique (convention  $e^{-i\omega t}$ ), et l'on cherche les solutions  $\tilde{u}$  satisfaisant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\varepsilon^{-1}(\omega)\nabla\tilde{u}) = \omega^2\mu\tilde{u} & \text{dans } D, \\ \tilde{u} = 0 & \text{sur } \partial D. \end{cases} \quad (4.4)$$

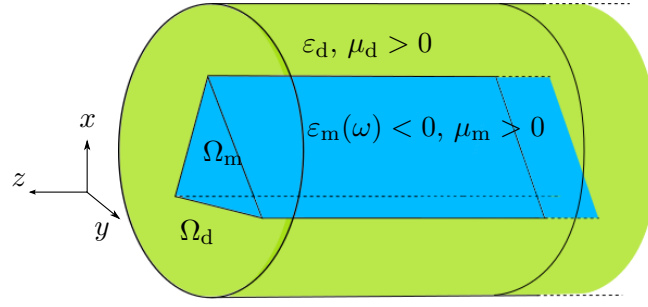


FIGURE 4.1 – Géométrie considérée. La section du guide est bornée, choisie circulaire ici mais elle peut être de forme arbitraire.

En raison de la géométrie cylindrique de  $D$ , nous allons chercher les solutions  $\tilde{u}$  de la forme

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall (x, y, z) \in D, \quad \tilde{u}(x, y, z)e^{-i\omega t} = u(x, y)e^{i(\beta z - \omega t)}, \quad \beta, \omega \in \mathbb{R}.$$

Ce sont les ondes se propageant dans la direction  $z$  dans le guide, de constante de propagation (ou nombre d'onde)  $\beta$ . En injectant cette forme de solution dans (4.4), nous pouvons nous ramener à l'étude d'un problème bidimensionnel dans la section  $\Omega$ , où  $u$  vérifie :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\varepsilon^{-1}(\omega)\nabla u) + \beta^2\varepsilon^{-1}(\omega)u = \omega^2\mu u & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.5)$$

**Remarque 4.1.** Nous noterons sans distinction  $\operatorname{div}$ ,  $\nabla$  les opérateurs divergence et gradient 2D ou 3D.

Le problème que nous souhaitons étudier est le suivant : "déterminer  $\beta, \omega \in \mathbb{R}$  tels qu'il existe  $u \neq 0$  vérifiant (4.5)".

#### 4.1.2 Formulation d'un problème de valeurs propres

Comme  $\beta$  et  $\omega$  font tous deux partie des inconnues du problème, il est classique de considérer l'un comme un paramètre et de chercher le second en fonction du premier. Nous avons deux choix :

- ★ On choisit une fréquence  $\omega$  et l'on cherche la paire  $(u, \beta^2)$ , solution du problème de valeurs propres suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u, \beta^2) \in D(A(\omega)) \setminus \{0\} \times \mathbb{C} \text{ tels que :} \\ A(\omega)u := \operatorname{div}(\varepsilon^{-1}(\omega)\nabla u) + \omega^2\mu u = \beta^2\varepsilon^{-1}(\omega)u & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (4.6)$$

Ci-dessus  $A(\omega) : D(A(\omega)) \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  est un opérateur non borné de domaine  $D(A(\omega)) := \{u \in H_0^1(\Omega) / \operatorname{div}(\varepsilon^{-1}(\omega)\nabla u) \in L^2(\Omega)\}$ .

- ★ On choisit un nombre d'onde  $\beta$  et l'on cherche la paire  $(u, \omega^2)$  solution du problème de valeurs propres :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u, \omega^2) \in D(A(\beta; \omega)) \setminus \{0\} \times \mathbb{C} \text{ tels que :} \\ A(\beta; \omega)u := -\operatorname{div}(\varepsilon^{-1}(\omega)\nabla u) + \beta^2\varepsilon^{-1}(\omega)u = \omega^2\mu u & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (4.7)$$

avec l'opérateur  $A(\beta; \omega) : D(A(\beta; \omega)) \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  l'opérateur non borné de domaine  $D(A(\beta; \omega)) = D(A(\omega))$ .

A priori le problème (4.6) semble plus simple car il est linéaire par rapport au paramètre spectral  $\beta^2$ . Cependant, le fait que  $\varepsilon$  soit présent de part et d'autre de l'équation rend la chose plus difficile. Déjà nous ne pouvons définir de produit scalaire (pondéré par  $\varepsilon$ ) puisque  $\varepsilon$  change de signe. Ceci étant dit, les travaux de Babuska et Osborn [4] permettent d'étudier des problèmes de valeurs propres sans produit scalaire à droite, c'est-à-dire de la forme  $Au = \lambda Bu$ , avec  $A$  un opérateur elliptique et  $B$  un opérateur compact (dans notre cas  $Bu = \varepsilon^{-1}u$ , ce qui est possible puisque  $\varepsilon^{-1} \in L^\infty(\Omega)$ ). Citons aussi les travaux de Fleckinger et Lapidus [64], où  $\varepsilon$  joue le rôle de poids "indéfini". Dans ce cas, si  $A$  est elliptique alors résoudre  $Au = \lambda Bu$  est équivalent à résoudre  $(A^{-1}B)u = \lambda^{-1}u$ . En revanche tout le formalisme est écrit pour des opérateurs bornés et non à domaine (pour ces derniers il faut être alors plus vigilant). Fermons la parenthèse et revenons au problème (4.6). C'est le fait que  $\varepsilon$  change aussi de signe dans la définition de l'opérateur  $A(\omega)$  qui complique grandement les choses. À notre connaissance il n'y a pas de théorie générale pour un tel problème spectral.

Considérons maintenant le problème (4.7). Cette fois-ci nous pouvons bien définir un produit scalaire à droite (pondéré par  $\mu$ ) mais la contrepartie est que nous avons un problème non linéaire en  $\omega$  (car l'opérateur dépend de  $\omega$ ). Traitons les difficultés une par une. Nous allons geler la dépendance en  $\omega$  de la permittivité  $\varepsilon_m$  et étudier le problème de valeurs propres *linéarisé* avec changement de signe :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour } \beta \in \mathbb{R}, \text{ trouver } (u, \omega^2) \in D(A) \setminus \{0\} \times \mathbb{C} \text{ tels que :} \\ A(\beta)u := -\mu^{-1} \operatorname{div}(\varepsilon^{-1} \nabla u) + \beta^2 \varepsilon^{-1} u = \omega^2 u \quad \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (4.8)$$

avec  $D(A) := \{u \in H_0^1(\Omega) / \operatorname{div}(\varepsilon^{-1} \nabla u) \in L^2(\Omega)\}$  (noté  $D(A)$  au lieu de  $D(A(\beta))$ ) car le domaine de l'opérateur ne dépend pas de  $\beta$ . C'est un problème spectral non classique car  $\varepsilon$  change de signe. Pour trouver les valeurs propres de (4.7), il faudra reprendre en compte que  $\varepsilon$  dépend de  $\omega$ , et vérifier que les valeurs propres  $\omega^2(\varepsilon)$  de (4.8) obtenues à  $\varepsilon$  fixé sont solutions de l'équation de point fixe  $\omega^2(\varepsilon) = \omega^2$ . Nous reviendrons en fin de chapitre sur le problème de valeurs propres non linéaire (4.7).

### 4.1.3 Résultats préliminaires et formulation variationnelle

Dans cette section nous introduisons quelques notations et résultats préliminaires à l'étude du problème (4.8), que nous reformulons aussi sous forme variationnelle.

Comme  $\mu$  est borné uniformément (inférieurement et supérieurement) par une constante positive, on introduit le produit scalaire  $L^2$  pondéré par  $\mu$ ,  $(\cdot, \cdot)_{\Omega, \mu} := (\mu \cdot, \cdot)_\Omega$ . Dans toute la suite du chapitre, l'espace  $L_\mu^2(\Omega)$  désignera l'espace  $L^2(\Omega)$  muni du produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_{\Omega, \mu}$ . Nous redéfinissons l'opérateur  $A(\beta)$  comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} A(\beta) : D(A(\beta)) \subset L_\mu^2(\Omega) \rightarrow L_\mu^2(\Omega), \quad \text{avec} \quad D(A) := \{v \in H_0^1(\Omega) / \mu^{-1} \operatorname{div}(\varepsilon^{-1} \nabla v) \in L_\mu^2(\Omega)\}, \\ A(\beta)u = -\mu^{-1} (\operatorname{div}(\varepsilon^{-1} \nabla u) - \beta^2 \varepsilon^{-1} u), \end{array} \right. \quad (4.9)$$

et nous cherchons à résoudre

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour } \beta \in \mathbb{R}, \text{ trouver } (u, \omega^2) \in D(A) \setminus \{0\} \times \mathbb{C} \text{ tels que :} \\ A(\beta)u = \omega^2 u \quad \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (4.10)$$

Nous rappelons des résultats classiques de théorie spectrale sur les opérateurs linéaires non bornés (voir [60, chapitre 3]). Soit  $E$  un espace de Hilbert muni du produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_E$ , et un opérateur  $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ .

**Définition 4.1.** Si  $A$  est de domaine dense, l'adjoint de  $A$  est l'opérateur  $A^* : D(A^*) \subset E \rightarrow E$  défini par

$$\begin{aligned} D(A^*) &:= \{w \in E \mid \exists v \in E, (v, Au)_E = (w, u)_E, \forall u \in D(A)\} \\ (Av, w)_E &= (v, A^*w)_E, \quad \forall v \in D(A), \forall w \in D(A^*). \end{aligned}$$

**Définition 4.2.** On dit que  $A$  est symétrique si  $(Av, w)_E = (v, Aw)_E, \quad \forall v, w \in D(A)$ . Si  $A$  est de domaine dense alors  $A \subset A^*$ .

**Définition 4.3.** On dit que  $A$  est auto-adjoint si  $A = A^*$ .

**Théorème 4.1.** Soit  $A : D(A) \subset E \rightarrow E$  symétrique. Alors  $A$  est de domaine dense et auto-adjoint si et seulement si  $R(A - \lambda I_E) = R(A - \bar{\lambda} I_E) = E$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ .

**Lemma 4.1** (Lemme et définition). On définit l'ensemble résolvant  $\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} / A - \lambda I_E \text{ est inversible}\}$ . L'opérateur  $A$  est à résolvante compacte si et seulement si il existe  $\lambda \in \rho(A)$  tel que  $(A - \lambda I_E)^{-1} : E \rightarrow E$  est un opérateur compact. Alors  $\forall \lambda \in \rho(A), (A - \lambda I_E)^{-1} : E \rightarrow E$  est un opérateur compact.

Pour étudier (4.10), il est pratique d'utiliser l'approche variationnelle :

**Proposition 4.1.** Le problème (4.10) est équivalent à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour } \beta \in \mathbb{R}, \text{ trouver } (u, \omega^2) \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} \times \mathbb{C} \text{ tels que :} \\ a(\beta; v, w) = \omega^2 (u, v)_{\Omega, \mu} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{array} \right. \quad (4.11)$$

avec

$$a(\beta; v, w) := \int_{\Omega} \varepsilon^{-1} \nabla v \cdot \overline{\nabla w} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \beta^2 \varepsilon^{-1} v \bar{w} \, d\mathbf{x}, \quad \forall (v, w) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega).$$

La forme  $a(\beta; \cdot, \cdot)$  est la forme bilinéaire associée à  $A(\beta)$  et

$$(A(\beta)v, w)_{\Omega, \mu} = a(\beta; v, w), \quad \forall v \in D(A), \forall w \in H_0^1(\Omega).$$

Ainsi étudier les propriétés de  $A(\beta)$  est équivalent à étudier les propriétés de la forme  $a(\beta; \cdot, \cdot)$ . À ce stade du manuscrit, nous espérons que le lecteur est convaincu que le fait que  $\varepsilon$  change de signe n'est plus un obstacle pour l'étude de (4.11). Plus précisément, nous savons établir que la forme  $a(\beta; \cdot, \cdot)$  est faiblement T-coercive (voir §2.4) sous certaines conditions sur  $\varepsilon$  et la géométrie. Précisons. On suppose que l'interface  $\Sigma$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  en tout point  $\mathbf{x} \in \Sigma$ , sauf en un nombre fini (potentiellement nul) de coins  $\mathbf{c}_n, n = 1, \dots, N$ . On suppose aussi qu'au voisinage de chaque coin  $\mathbf{c}_n, \Omega_m$  coïncide avec un secteur d'angle  $\phi_n$ .

**Remarque 4.2.** Pour faire le lien avec les autres chapitres, on note  $\phi_n$  l'angle dans  $\Omega_m$  et  $\alpha_n := 2\pi - \phi_n$  celui dans  $\Omega_d$ .

$$\text{On définit } b_{\Sigma} := \begin{cases} \max_{i=1, N} \left( \frac{2\pi - \phi_i}{\phi_i}, \frac{\phi_i}{2\pi - \phi_i} \right) & \text{si } \Sigma \text{ possède des coins } (N \geq 1) \\ 1 & \text{si } \Sigma \text{ est régulière } (N = 0). \end{cases}$$

On définit l'intervalle critique par

$$I_c := [-b_{\Sigma}; -1/b_{\Sigma}],$$

et l'on obtient le résultat suivant :



**Lemme 4.1.** *Soit  $\beta \in \mathbb{R}$ . Soit  $\kappa_\varepsilon := \varepsilon_m/\varepsilon_d$  tel que  $\kappa_\varepsilon \notin I_c$ . Alors la forme  $a(\beta; \cdot, \cdot)$  est faiblement T-coercive, à savoir :*

$$\exists T \text{ un isomorphisme de } H_0^1(\Omega), \mathcal{C} \text{ un opérateur compact tels que } \exists C > 0, C_0 \in \mathbb{R}, \forall u \in H_0^1(\Omega) \quad (4.12)$$

$$a(\beta; u, Tu) \geq C \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - C_0 \|\mathcal{C}u\|_{H_0^1(\Omega)}^2.$$

**Preuve.** On décompose alors  $a(\beta; \cdot, \cdot)$  sous la forme  $a(\beta; v, w) = a(v, w) + c(\beta; v, w)$  pour tout  $v, w \in H_0^1(\Omega)$ , avec  $a(v, w) := \int_{\Omega} \varepsilon^{-1} \nabla v \cdot \overline{\nabla w} \, d\mathbf{x}$  et  $c(\beta; v, w) := \int_{\Omega} \beta^2 \varepsilon^{-1} v \overline{w} \, d\mathbf{x}$ . Il suffit de remarquer que la forme  $a$  est exactement celle étudiée au chapitre 2 (on en déduit que  $a$  est faiblement T-coercive pour  $\kappa_\varepsilon \notin I_c$ ), et  $\widehat{C}(\beta) : H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$  tel que  $(\widehat{C}(\beta)v, w)_{H_0^1(\Omega)} = (\beta^2 \varepsilon^{-1} v, w)_{\Omega}$  est un opérateur compact (par le théorème de Rellich). Ainsi la forme  $c(\beta; \cdot, \cdot)$  ne contribue qu'au second terme du membre de droite dans (4.12), ce qui conclut le résultat.  $\square$

Dans la section suivante nous commençons par étudier les propriétés de  $A(\beta)$  pour un contraste en dehors de l'intervalle critique.

## 4.2 Cas d'un contraste hors intervalle critique

### 4.2.1 Caractère auto-adjoint et résolvante compacte

Nous avons tous les outils nécessaires pour étudier les propriétés de  $A(\beta)$ . Comme  $\beta \in \mathbb{R}$ , on montre facilement que  $A(\beta)$  est symétrique. Notons que ce n'est plus le cas pour  $\beta \in \mathbb{C}$ .

**Théorème 4.2.** *Soit  $\beta \in \mathbb{R}$ . Si  $\kappa_\varepsilon \notin I_c$ , alors  $A(\beta)$  est auto-adjoint et à résolvante compacte.*

**Preuve.**  $\star$  Commençons par montrer le caractère auto-adjoint. Soit  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ . Introduisons la formulation variationnelle :

$$\left| \begin{array}{l} \text{Pour } f \in L_{\mu}^2(\Omega), \text{ trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ a(\beta; u, v) - \lambda(u, v)_{\Omega, \mu} = (f, v)_{\Omega, \mu}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right. \quad (4.13)$$

Nous allons montrer que (4.13) est bien posé. Lorsque  $\kappa_\varepsilon \notin I_c$ , avec le lemme 4.1, on en déduit que la forme  $a(\beta; \cdot, \cdot)$  est faiblement T-coercive, et on montre que la forme  $-\lambda(\cdot, \cdot)_{\Omega, \mu}$  est une perturbation compacte de  $a(\beta; \cdot, \cdot)$ . On en déduit alors que (4.13) relève de l'alternative de Fredholm. Montrons qu'il y a unicité de la solution : soit  $u \in V$  tel que  $a(\beta; u, u) - \lambda(u, u)_{\Omega, \mu} = 0$ . Comme  $\varepsilon^{-1}$ ,  $\mu$  et  $\beta$  sont à valeurs réelles, nous avons  $\Im m(\lambda) \|u\|_{L_{\mu}^2(\Omega)}^2 = 0 \implies u = 0$ . Ainsi (4.13) est bien posé, ce qui veut dire que le problème "Trouver  $u \in D(A)$  tel que  $(A(\beta) - \lambda I_{L_{\mu}^2(\Omega)})u = f$ " admet une unique solution (et donc que  $A(\beta) - \lambda I_{L_{\mu}^2(\Omega)}$  est en particulier surjectif). En effet, si  $u$  est solution de (4.13) alors on obtient au sens des distributions  $-(\operatorname{div}(\varepsilon \nabla u) - \beta^2 \varepsilon^{-1} u) - \lambda \mu u = \mu f$ . On en déduit que  $\mu^{-1} \operatorname{div}(\varepsilon \nabla u) \in L_{\mu}^2(\Omega)$  soit  $u \in D(A)$ . En effectuant de même avec  $\bar{\lambda}$ , nous pouvons conclure que les opérateurs  $A(\beta) - \lambda I_{L_{\mu}^2(\Omega)}$  et  $A(\beta) - \bar{\lambda} I_{L_{\mu}^2(\Omega)}$  sont donc surjectifs. Le théorème 4.1 nous permet alors de conclure que  $A(\beta)$  est auto-adjoint.

$\star$  Montrons que  $A(\beta)$  est à résolvante compacte. D'après ce qui précède,  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \subset \rho(A(\beta))$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , d'après le théorème 4.1 il suffit de montrer que  $B_{\lambda} := (A(\beta) - \lambda I_{L_{\mu}^2(\Omega)})^{-1} : L_{\mu}^2(\Omega) \rightarrow L_{\mu}^2(\Omega)$  est un opérateur compact. Soit  $(f_n)_n$  une suite bornée dans  $L_{\mu}^2(\Omega)$ . Comme (4.13) est bien posé dans  $H_0^1(\Omega)$ , pour tout  $f_n \in L_{\mu}^2(\Omega)$  il existe un unique  $u_n \in D(A)$  tel que  $u_n = B_{\lambda} f_n$ , et il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $f_n$  telle que  $\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} = \|B_{\lambda} f_n\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \|f_n\|_{\Omega, \mu}$ . Donc  $(B_{\lambda} f_n)_n$  est une

suite bornée dans  $H_0^1(\Omega)$ . Comme l'injection de  $H_0^1(\Omega)$  dans  $L_\mu^2(\Omega)$  est compacte on peut en extraire une sous-suite qui converge, d'où le résultat.  $\square$

## 4.2.2 Conséquences sur le spectre

Lorsque  $\kappa_\varepsilon \notin I_c$ , comme  $A(\beta)$  est auto-adjoint et à résolvante compacte alors le spectre, noté  $\sigma(A(\beta))$ , est réel discret. Plus précisément  $\sigma(A(\beta))$  est composé de deux suites de valeurs propres de multiplicité finie tendant vers plus et moins l'infini (à cause du changement de signe de  $\varepsilon$ ). C'est ce que nous montrons dans cette section.

★Comme  $A(\beta)$  est auto-adjoint, son spectre est réel.

★Comme  $A(\beta)$  est à résolvante compacte, son spectre est discret, composé de valeurs propres de multiplicité finie.

★Il nous reste à montrer que  $\sigma(A(\beta))$  est composé d'une suite de valeurs propres qui tend bien vers plus et moins l'infini. Il suffit de montrer que l'image numérique de  $A(\beta)$  n'est bornée ni inférieurement ni supérieurement. En d'autres termes, nous allons construire deux suites  $(u_n^+)_n, (u_n^-)_n$  appartenant à  $D(A)$  telles que

$$\|u_n^\pm\|_\Omega = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \pm\infty} (A(\beta)u_n^\pm, u_n^\pm)_{\Omega, \mu} = \pm\infty.$$

Nous nous inspirons de [119, Proposition 5.6]. Commençons par la suite  $(u_n^+)_n$ . Soit  $\mathbf{x}_d := (x_d, y_d) \in \Omega_d$ , soit  $\delta > 0$  tel que la boule  $\{\mathbf{x} \in \Omega \mid |\mathbf{x} - \mathbf{x}_d| < \delta\}$  soit contenue dans  $\Omega_d$ , et soit une fonction  $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty([0, \delta])$ . On définit

$$u_n^+(\mathbf{x}) = \mu^{-1} \sqrt{n} \chi(n|\mathbf{x} - \mathbf{x}_d|) / \|\chi\|_\Omega \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

Comme pour tout  $n$ ,  $u_n^+$  est à support dans  $\Omega_d$ , on a bien  $u_n^+ \in D(A)$ , et l'on vérifie que  $\|u_n^+\|_\Omega = 1$ , et  $\|u_n^+\|_{H_0^1(\Omega)} = n \|\chi\|_{H_0^1(\Omega)} / \|\chi\|_\Omega$ . Il vient

$$(A(\beta)u_n^+, u_n^+)_{\Omega, \mu} = a(\beta; u_n^+, u_n^+) = \frac{\varepsilon_d^{-1}}{\|\chi\|_\Omega^2} \left( \int_{\Omega_d} n^2 |\nabla \chi|^2 + \beta^2 |\chi|^2 \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

On procède de même pour construire la suite  $u_n^-$  (en travaillant dans  $\Omega_m$ ) et l'on trouve le résultat.

Avec la caractérisation du spectre que nous venons de faire, nous obtenons le résultat suivant :

**Lemme 4.2.** *Soit  $\kappa_\varepsilon \notin I_c$ . Alors il existe  $t \in \mathbb{R} \cap \rho(A(\beta))$  tel que  $B_t := (A(\beta) - tI_{L_\mu^2(\Omega)})^{-1} : L_\mu^2(\Omega) \rightarrow L_\mu^2(\Omega)$  soit bien défini et  $B_t$  est un opérateur auto-adjoint et compact. Son spectre  $\sigma(B_t)$  est composé de deux suites de valeurs propres positives et négatives de multiplicité finie tendant vers 0.*

C'est cet opérateur  $B_t$  qui nous intéressera pour les questions d'approximation. En effet, l'approximation des valeurs propres d'un opérateur compact est bien connue [110, 4], de plus, approcher les valeurs propres de  $B_t$  est équivalent à approcher celles de  $A(\beta)$ . En effet, si l'on note  $(\nu_n)_n$  l'ensemble des valeurs propres de l'opérateur  $B_t$ , alors les valeurs propres  $(\lambda_n)_n$  de  $A(\beta)$  sont simplement données par

$$\lambda_n = \nu_n^{-1} + t, \quad \forall n. \quad (4.14)$$

Nous y reviendrons dans la section 4.3.

Nous terminons ce paragraphe avec quelques commentaires sur la théorie des opérateurs auto-adjoints à résolvante compacte. Cette théorie est bien connue, et lorsque  $\varepsilon > 0$ ,  $A(\beta)$  est aussi positif puisque la forme  $a$  est coercive. Le spectre de l'opérateur  $A(\beta)$  est alors composé d'une suite de valeurs propres positives de multiplicité finie, tendant vers  $+\infty$ . Nous pouvons alors écrire une formule de Min-Max [60, chapitre XI], faisant intervenir les quotients de Rayleigh. Ici comme  $\varepsilon$  change de signe, nous ne pouvons pas écrire une formule de Min-Max puisque l'opérateur n'est pas borné inférieurement, et nous avons vu que le spectre contient des valeurs propres positives et négatives. Un tel problème a déjà été rencontré dans la thèse de K. Ramdani [119, chapitre 5] : pour y remédier, on propose d'étudier les valeurs propres de l'opérateur inverse (s'il existe). On sait que l'inverse est auto-adjoint borné inférieurement (et supérieurement), donc on peut caractériser ses valeurs propres avec un principe du Min-Max. De même, il est possible ici d'écrire les valeurs propres de  $B_t$  avec une formule de Min-Max, cependant l'utilisation de ces formules est beaucoup plus délicate que les formules habituelles (les champs tests sont choisis dans le domaine de l'opérateur).

Rappelons-nous que les valeurs propres de  $A(\beta)$  sont en fait les fréquences de résonances de la cavité  $\Omega$  et qu'elles dépendent du paramètre  $\beta$ . Le spectre de  $A(\beta)$  est donc formé de deux suites de valeurs propres de multiplicité finie tendant vers plus et moins l'infini, que l'on note

$$\dots \leq \omega_{-n}^2(\beta) \leq \dots \leq \omega_{-1}^2(\beta) \leq 0 \leq \omega_1^2(\beta) \leq \dots \leq \omega_n^2(\beta) \leq \dots$$

Une valeur propre réelle positive  $\omega_n^2(\beta)$  associée au mode  $u_n$  implique alors  $\omega_n(\beta) \in \mathbb{R}$ . Respectivement, une valeur propre réelle négative  $\omega_{-n}^2(\beta)$  associée au mode  $u_{-n}$  implique que  $\omega_{-n}(\beta) \in i\mathbb{R}$ . En reprenant en compte la dépendance harmonique en temps, ces modes s'écrivent :

$$u_n e^{i(\beta z - \omega_n(\beta)t)} \quad \text{et} \quad u_{-n} e^{\Im m(\omega_{-n}(\beta))t} e^{i\beta z}.$$

Les modes peuvent donc se propager avec ou sans atténuation en temps le long du guide (dans la direction  $z$ ). Notons que les modes que l'on appelle guidés ( $\omega \in \mathbb{R}$ ) sont donc les modes associés aux valeurs propres positives de  $A(\beta)$ .

**Remarque 4.3.** *En théorie des guides d'ondes, les termes propagatifs et évanescents caractérisent les cas  $\beta \in \mathbb{R}$  et  $\beta \in i\mathbb{R}$  tandis qu'ici nous avons adopté un point de vue où les rôles de  $\beta$  et  $\omega$  sont inversés. Nous dirons donc que les modes sont évanescents ou propagatifs "en temps".*

### 4.2.3 Localisation des modes

Précédemment, pour montrer que le spectre de  $A(\beta)$  était composé de deux suites de valeurs propres qui tendent vers plus et moins l'infini, nous avons utilisé deux suites à support inclus dans  $\Omega_d$  ou dans  $\Omega_m$ . Ces suites peuvent être vues comme une suite de modes qui sont confinés dans  $\Omega_d$  lorsqu'ils sont associés à une valeur propre positive, et inversement confinés dans  $\Omega_m$  lorsqu'ils sont associés à une valeur propre négative. En fait ce phénomène de localisation peut se montrer pour tous les modes, et c'est ce que nous présentons dans cette section<sup>1</sup>. Nous mentionnons aussi que la localisation des modes a été étudiée dans [42], avec une étude asymptotique lorsque l'inclusion métallique devient de plus en plus petite.

Pour alléger les notations, dans cette section nous noterons par  $\lambda_n$  les valeurs propres de  $A(\beta)$ .

**Proposition 4.2.** *Soient  $(\lambda_{\pm n})_{n \in \mathbb{N}^*}$  les valeurs propres de  $A(\beta)$  (4.9) telles que :*

$$\dots \leq \lambda_{-n} \leq \dots \leq \lambda_{-1} \leq 0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_n \leq \dots \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \lambda_{\pm n} = \pm\infty.$$

1. Nous remercions Lucas Chesnel pour ses propositions.

Soient  $\omega_d, \omega_m$  deux ouverts tels que  $\overline{\omega_m} \subset \Omega_m, \overline{\omega_d} \subset \Omega_d$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $u_{\pm n} \neq 0$  le vecteur propre associé à  $\lambda_{\pm n}$ . Alors pour tout  $p \geq 0$  nous avons les estimations

$$\lambda_n^p \|u_n\|_{H^1(\omega_m)} \leq C_m(p) \|u_n\|_{\Omega, \mu},$$

$$|\lambda_{-n}^p| \|u_{-n}\|_{H^1(\omega_d)} \leq C_d(p) \|u_{-n}\|_{\Omega, \mu},$$

pour  $n$  grand, avec  $C_m(p) > 0$  (resp.  $C_d(p) > 0$ ) une constante indépendante de  $n$ , dépendant de  $p$  et de  $\omega_m$  (resp.  $\omega_d$ ).

Ce résultat a pour conséquence que sur tout domaine strictement inclus dans  $\Omega_d$  ou  $\Omega_m$ , alors  $u_{\pm n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$  pour tout mode  $u_{\pm n}$  normalisé ( $\|u_{\pm n}\|_{\Omega, \mu} = 1$ ). En d'autres termes plus les valeurs propres sont grandes (en valeur absolue), plus les modes associés à une valeur propre positive (resp. négative) sont confinés dans  $\Omega_d$  (resp.  $\Omega_m$ ). La conclusion que nous venons d'annoncer dépend peu de la valeur de  $p$ , nous pouvons même prendre  $p = 1$ . Cependant cela nous permet d'être plus fin, dans le sens où nous pouvons caractériser la vitesse de décroissance des modes lorsque  $n$  tend vers l'infini : comme le résultat est valable pour tout  $p$  (fini), on en déduit que les modes décroissent de façon exponentielle avec  $n$ .

Pour montrer ce résultat on part du constat suivant. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , soit  $(u_n, \lambda_n)$  une paire de vecteur propre, valeur propre (positive) de  $A(\beta)$ , on souhaite montrer que  $u_n$  est confiné dans  $\Omega_d$ . Nous avons

$$\varepsilon_d^{-1} \int_{\Omega_d} |\nabla u_n|^2 d\mathbf{x} = \lambda_n \|u_n\|_{\Omega, \mu}^2 + |\varepsilon_m^{-1}| \int_{\Omega_m} |\nabla u_n|^2 d\mathbf{x}.$$

La première idée consiste à majorer le membre de gauche par  $\lambda_n^2 \|u_n\|_{\Omega, \mu}^2$  en utilisant le fait que (4.13) est un problème Fredholm (voir les détails ci-dessous). Le problème est que ce n'est pas suffisant pour conclure à cause du terme  $\lambda_n \|u_n\|_{\Omega, \mu}^2$  à droite. L'idée est donc de majorer la norme de  $\nabla u_n$  de façon plus fine, avec une puissance de  $\lambda_n$  différente sur  $\Omega_d$  et sur  $\Omega_m$ . Pour ce faire on construit une fonction test particulière (ou encore une fonction de troncature particulière) de support localisé dans un des deux sous domaines  $\Omega_m$  ou  $\Omega_d$ .

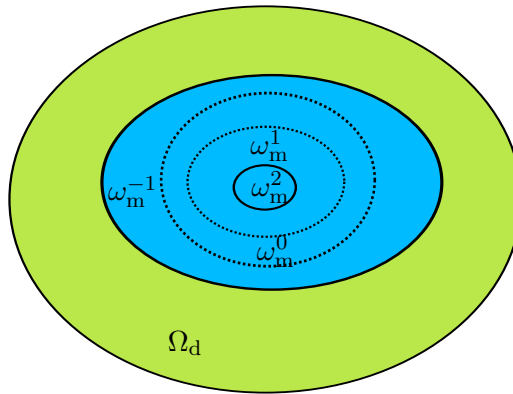


FIGURE 4.2 – Représentation schématique de  $(\omega_m^k)_{k=-1, p}$ , pour  $p = 2$ .

**Preuve.** Nous prouvons la première inégalité, la deuxième s'obtenant de façon similaire. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , on suppose  $n$  suffisamment grand pour que  $\lambda_n > 1$ . Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ , on définit une suite d'ouverts

$(\omega_m^k)_{k=-1,p}$  telle que

$$\omega_m^p = \omega_m, \quad \overline{\omega_m^k} \subset \omega_m^{k-1}, \quad \omega_m^{-1} = \Omega_m,$$

pour  $k = 0, p$  (voir Figure 4.2 pour un exemple).

On définit la fonction  $\mathbf{R}_k$  telle que

$$\mathbf{R}_k(x, y) = \begin{cases} 1/\lambda_n & \text{dans } \Omega \setminus \overline{\omega_m^{k-1}} \\ \gamma_k(x, y) & \text{dans } \omega_m^{k-1} \setminus \overline{\omega_m^k} \\ \lambda_n^{k/2} & \text{dans } \omega_m^k \end{cases},$$

avec la fonction  $\gamma_k$  définie dans  $H^1(\omega_m^{k-1} \setminus \overline{\omega_m^k})$  telle que

$$\begin{cases} \Delta \gamma_k = 0 & \text{dans } \omega_m^{k-1} \setminus \overline{\omega_m^k} \\ \gamma_k = 1/\lambda_n & \text{sur } \partial \omega_m^{k-1} \\ \gamma_k = \lambda_n^{k/2} & \text{sur } \partial \omega_m^k \end{cases}.$$

Avec cette définition,  $\mathbf{R}_k$  est bien une fonction continue sur  $\Omega$ . Comme  $\lambda_n > 1$ , nous pouvons contrôler  $\|\nabla \mathbf{R}_k\|_{L^\infty(\Omega)}$  comme suit :

$$\|\nabla \mathbf{R}_k\|_{L^\infty(\Omega)} = \|\nabla \gamma_k\|_{L^\infty(\omega_m^{k-1} \setminus \overline{\omega_m^k})} \leq C(p) \lambda_n^{k/2}, \quad (4.15)$$

où  $C(p) > 0$  une constante qui dépend de la distance entre  $\partial \omega_m^{k-1}$  et  $\partial \omega_m^k$  (d'où la dépendance en  $p$ ). Plus précisément  $C(p)$  est proportionnelle à l'inverse de cette distance. En supposant que la distance  $\text{dist}(\partial \omega_m^k, \partial \omega_m^{k-1})$  est la même pour tout  $k = 0, p$ , alors  $C(p)$  est proportionnelle à  $p$  sur la distance  $\text{dist}(\partial \omega_m, \partial \Omega_m)$ .

Pour tout  $v \in H_0^1(\Omega)$ , nous avons  $(\varepsilon^{-1} \nabla u_n, \nabla v)_\Omega + \beta^2 (\varepsilon^{-1} u_n, v)_\Omega = \lambda_n (u_n, v)_{\Omega, \mu}$  (on rappelle que  $(\cdot, \cdot)_\Omega$  dénote le produit scalaire classique sur  $L^2(\Omega)$ ). Choisissons  $v = \mathbf{R}_k^2 u_n \in H_0^1(\Omega)$ , on obtient alors

$$\begin{aligned} \lambda_n \|\mathbf{R}_k u_n\|_{\Omega, \mu}^2 &= (\varepsilon^{-1} \nabla u_n, \nabla (\mathbf{R}_k^2 u_n))_\Omega + \beta^2 (\varepsilon^{-1} u_n, \mathbf{R}_k^2 u_n)_\Omega \\ &= (\varepsilon^{-1} \mathbf{R}_k \nabla u_n, \nabla (\mathbf{R}_k u_n))_\Omega + (\varepsilon^{-1} \mathbf{R}_k \nabla u_n, u_n \nabla \mathbf{R}_k)_\Omega + \beta^2 (\varepsilon^{-1} \mathbf{R}_k u_n, \mathbf{R}_k u_n)_\Omega, \\ &= (\varepsilon^{-1} \nabla (\mathbf{R}_k u_n), \nabla (\mathbf{R}_k u_n))_\Omega - (\varepsilon^{-1} u_n \nabla \mathbf{R}_k, u_n \nabla \mathbf{R}_k)_\Omega + \beta^2 (\varepsilon^{-1} \mathbf{R}_k u_n, \mathbf{R}_k u_n)_\Omega, \end{aligned}$$

ce qui s'écrit encore

$$\begin{aligned} &\lambda_n \|\mathbf{R}_k u_n\|_{\Omega, \mu}^2 + |\varepsilon_m^{-1}| \|\nabla (\mathbf{R}_k u_n)\|_{\Omega_m}^2 + \beta^2 |\varepsilon_m^{-1}| \|\mathbf{R}_k u_n\|_{\Omega_m}^2 + \varepsilon_d^{-1} \|u_n \nabla \mathbf{R}_k\|_{\Omega_d}^2 \\ &= \varepsilon_d^{-1} \|\nabla (\mathbf{R}_k u_n)\|_{\Omega_d}^2 + |\varepsilon_m^{-1}| \|u_n \nabla \mathbf{R}_k\|_{\Omega_m}^2 + \beta^2 \varepsilon_d^{-1} \|\mathbf{R}_k u_n\|_{\Omega_d}^2. \end{aligned}$$

On explicite tous les termes ci-dessus en utilisant l'expression de  $\mathbf{R}_k$ . Comme  $\mathbf{R}_k$  est constante sur  $\Omega_d$ ,  $\Omega_m \setminus \overline{\omega_m^{k-1}}$  et sur  $\omega_m^k$  on obtient :

$$\begin{aligned} &\lambda_n \|\mathbf{R}_k u_n\|_{\Omega, \mu}^2 + \lambda_n^k |\varepsilon_m^{-1}| \|\nabla u_n\|_{\omega_m^k}^2 + |\varepsilon_m^{-1}| \|\nabla (\mathbf{R}_k u_n)\|_{\omega_m^{k-1} \setminus \overline{\omega_m^k}}^2 + \lambda_n^{-2} |\varepsilon_m^{-1}| \|\nabla u_n\|_{\Omega_m \setminus \overline{\omega_m^{k-1}}}^2 \\ &+ \lambda_n^k \beta^2 |\varepsilon_m^{-1}| \|u_n\|_{\omega_m^k}^2 + \beta^2 |\varepsilon_m^{-1}| \|\mathbf{R}_k u_n\|_{\omega_m^{k-1} \setminus \overline{\omega_m^k}}^2 + \lambda_n^{-2} \beta^2 |\varepsilon_m^{-1}| \|u_n\|_{\Omega_m \setminus \overline{\omega_m^{k-1}}}^2 \\ &= \lambda_n^{-2} \varepsilon_d^{-1} \|\nabla u_n\|_{\Omega_d}^2 + |\varepsilon_m^{-1}| \|u_n \nabla \mathbf{R}_k\|_{\omega_m^{k-1} \setminus \overline{\omega_m^k}}^2 + \lambda_n^{-2} \beta^2 \varepsilon_d^{-1} \|u_n\|_{\Omega_d}^2. \end{aligned}$$

L'idée maintenant est d'aboutir à l'inégalité de la proposition. Pour ce faire, la première étape est de majorer  $\lambda_n^{-2} \varepsilon_d^{-1} \|\nabla u_n\|_{\Omega_d}^2$  par  $\|u_n\|_{\Omega, \mu}^2$ . Pour cela, on utilise le fait que  $a(\beta; \cdot, \cdot)$  est faiblement T-coercive (voir lemme 4.1). En effet cette propriété nous permet d'affirmer que l'opérateur  $\widehat{A}(\beta)$  :

$H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$  tel que  $(\widehat{A}(\beta)v, w)_{H_0^1(\Omega)} = a(\beta; v, w)$  pour tout  $v, w \in H_0^1(\Omega)$  est de type Fredholm. Le lemme de Peetre [113] nous donne alors, en considérant  $\lambda_n u_n$  comme terme source,

$$\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \lambda_n \|u_n\|_{\Omega, \mu}. \quad (4.16)$$

Dans toute la suite  $C$  désigne une constante générique pouvant varier d'une ligne à l'autre (nous préciserons si elle dépend de  $p$  ou non). Finissons de majorer le membre de droite. En utilisant (4.15), (4.16), plus le fait que  $\lambda_n > 1$ , nous obtenons

$$\lambda_n^{-2} \varepsilon_d^{-1} \|\nabla u_n\|_{\Omega_d}^2 + |\varepsilon_m^{-1}| \|u_n \nabla \mathbf{R}_k\|_{\omega_m^{k-1} \setminus \overline{\omega_m^k}}^2 + \lambda^{-2} \beta^2 \varepsilon_d^{-1} \|u_n\|_{\Omega_d}^2 \leq C \|u_n\|_{\Omega, \mu}^2 + C(p) \lambda_n^k \|u_n\|_{\omega_m^{k-1} \setminus \overline{\omega_m^k}}^2.$$

On minore le membre de gauche en ne gardant que les termes d'ordres élevés en puissance de  $\lambda_n$  (tous les termes étant positifs), ce qui nous donne finalement

$$\lambda_n^{k+1} \|u_n\|_{\omega_m^k}^2 + \lambda_n^k \|u_n\|_{H^1(\omega_m^k)}^2 \leq C(p) \left( \|u_n\|_{\Omega, \mu}^2 + \lambda_n^k \|u_n\|_{\omega_m^{k-1} \setminus \overline{\omega_m^k}}^2 \right).$$

Pour  $k = 0$  nous avons notamment

$$\lambda_n \|u_n\|_{\omega_m^0}^2 + \|u_n\|_{H^1(\omega_m^0)}^2 \leq C(p) \|u_n\|_{\Omega, \mu}^2.$$

En utilisant l'inégalité ci-dessus on obtient pour  $k = 1$

$$\lambda_n^2 \|u_n\|_{\omega_m^1}^2 + \lambda \|u_n\|_{H^1(\omega_m^1)}^2 \leq C(p) \left( \|u_n\|_{\Omega, \mu}^2 + \lambda_n \|u_n\|_{\omega_m^0}^2 \right) \leq C(p) \|u_n\|_{\Omega, \mu}^2,$$

on en déduit par récurrence finie sur  $k$

$$\lambda_n^{p+1} \|u_n\|_{\omega_m}^2 + \lambda_n^p \|u_n\|_{H^1(\omega_m)}^2 \leq C(p) \|u_n\|_{\Omega, \mu}^2.$$

Ainsi  $\lambda_n^p \|u_n\|_{H^1(\omega_m)}^2 \leq C(p) \|u_n\|_{\Omega, \mu}^2$ , ce qui est l'inégalité voulue. □

Nous proposons dans la section suivante quelques expériences numériques pour illustrer ce résultat. La justification de la convergence des méthodes éléments finis est présentée dans la section 4.3.

#### 4.2.4 Calcul des modes guidés et relation de dispersion

On souhaite calculer numériquement les solutions de (4.10), plus précisément les modes guidés d'un guide d'ondes plasmonique avec une section circulaire, et une inclusion métallique de section triangulaire (voir Figure 4.6), pour un contraste  $\kappa_\varepsilon \notin I_c$ . On rappelle que dans ce cas le spectre de  $A(\beta)$  est composé des fréquences de résonances de la cavité  $\Omega$

$$\dots \leq \omega_{-n}^2(\beta) \leq \dots \leq \omega_{-1}^2(\beta) \leq 0 \leq \omega_1^2(\beta) \leq \dots \leq \omega_n^2(\beta) \leq \dots$$

Les valeurs propres de  $A(\beta)$  dépendent du paramètre  $\beta$ , et tracer leur évolution en fonction du nombre d'onde constitue les courbes de dispersion.

Pour les illustrations numériques on considère un triangle isocèle d'angle au sommet  $\phi_1 = \pi/6$ , et pour la base  $\phi_2 = \phi_3 = 5\pi/12$ . Dans ce cas  $b_\Sigma = (2\pi - \phi_1)/\phi_1 = 11$ , et l'intervalle critique vaut  $I_c = [-11; -1/11]$ . Nous utilisons un code que nous avons implémenté sous MATLAB et nous considérons des éléments finis de Lagrange d'ordre 2. Nous avons calculé les cent premières valeurs propres pour  $\beta = 1$  et  $\kappa_\varepsilon = -13$  ( $\varepsilon_m = -13$  et  $\varepsilon_d = \mu_d = \mu_m = 1$ ), pour six maillages différents (13273 nœuds, 24565 nœuds, 38245 nœuds, 56061 nœuds, 75685 nœuds, et 100501 nœuds). Dans la Figure 4.3

nous avons représenté ces cent premières valeurs propres, et les courbes de dispersion. Dans la Figure 4.4 sont représentés quelques modes obtenus avec le maillage le plus fin.

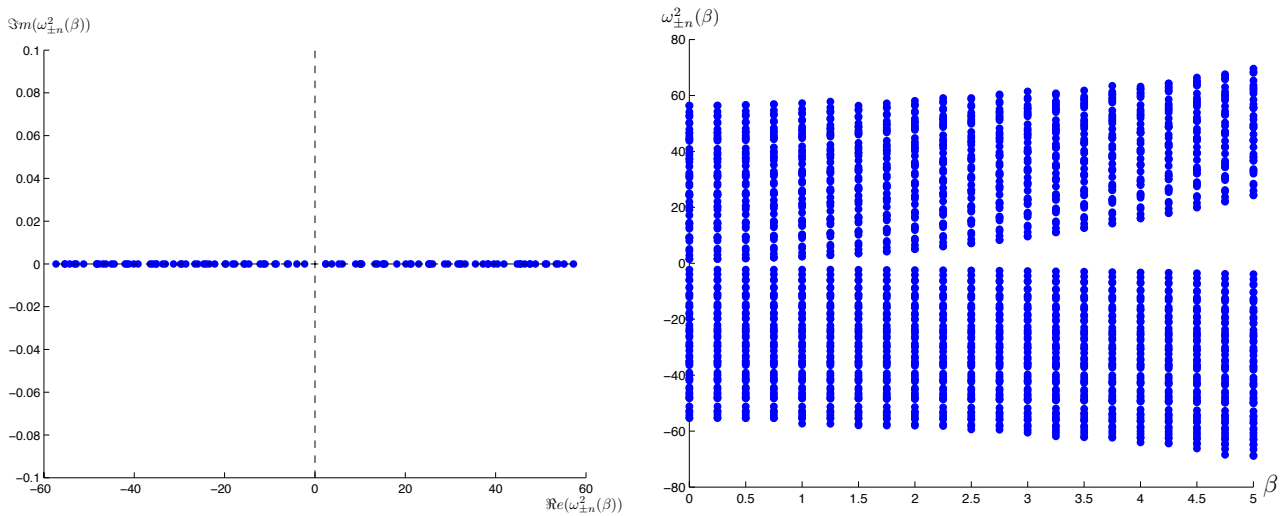


FIGURE 4.3 – Représentation des 100 premières valeurs propres de l'opérateur pour  $\beta = 1$ ,  $\kappa_\varepsilon = -13$ , et l'évolution du spectre en fonction de  $\beta$  (relation de dispersion entre  $\beta$  et  $(\omega_{\pm n}^2(\beta))_n$ ), pour  $\kappa_\varepsilon = -13$ .

Comme attendu, nous obtenons un spectre réel (discret), composé de valeurs propres négatives et positives tendant vers  $\pm\infty$ . Remarquons aussi que pour les valeurs propres négatives, les modes sont confinés dans le métal, tandis qu'ils sont confinés à l'extérieur pour les valeurs propres positives (voir Figure 4.4) : ceci est en accord avec les résultats de la section 4.2.3. La méthode numérique est stable, dans le sens où lorsque l'on raffine le maillage, les modes (et leur valeur propre associée) sont stables vis-à-vis du pas de maillage. Sur la Figure 4.5 nous avons tracé en échelle log – log les courbes de convergence des valeurs propres associées aux modes de la Figure 4.4 en fonction du pas de maillage. Comme nous n'avons pas accès analytiquement aux valeurs propres, nous comparons à celle obtenue sur le maillage le plus fin. La justification de la convergence de l'approximation est présentée dans la section suivante.

**Remarque 4.4.** Avec la géométrie considérée, les modes sont symétriques ou anti-symétriques par rapport à l'axe  $x = 0$  (on place l'origine au centre de la section). Nous aurions donc pu ne travailler que sur un demi domaine, par exemple  $\Omega^{1/2}$  tel que  $\Omega^{1/2} := \Omega \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0\}$ , en imposant une condition de Dirichlet ou de Neumann sur  $\partial\Omega^{1/2} \cap (\{0\} \times \mathbb{R})$ .

Les courbes de dispersion de la Figure 4.3 nous indiquent que, pour la configuration choisie, les valeurs propres positives augmentent (en module) avec  $\beta$ , tandis que les valeurs propres négatives diminuent avec  $\beta$ . Les deux suites de valeurs propres sont monotones avec  $\beta$ , et les modes guidés restent des modes guidés lorsqu'on augmente  $\beta$ , respectivement les modes *évanescents en temps* restent évanescents en temps lorsqu'on augmente  $\beta$ .

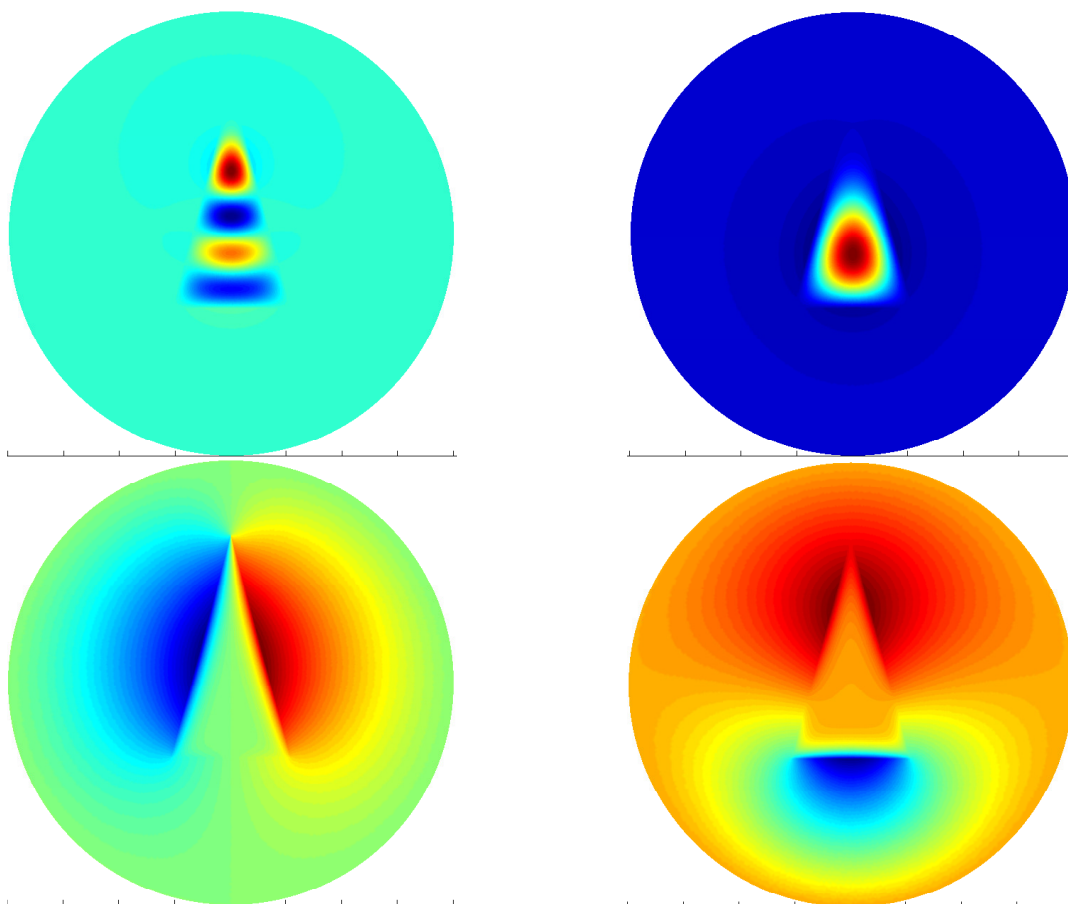


FIGURE 4.4 – De gauche à droite, de haut en bas : représentation des modes associés à  $\lambda = -6.1058$ ,  $\lambda = -2.2689$ ,  $\lambda = 2.4044$ ,  $\lambda = 3.7541$ , calculés avec des éléments finis P2 pour  $\beta = 1$  et  $\kappa_\varepsilon = -13$ .

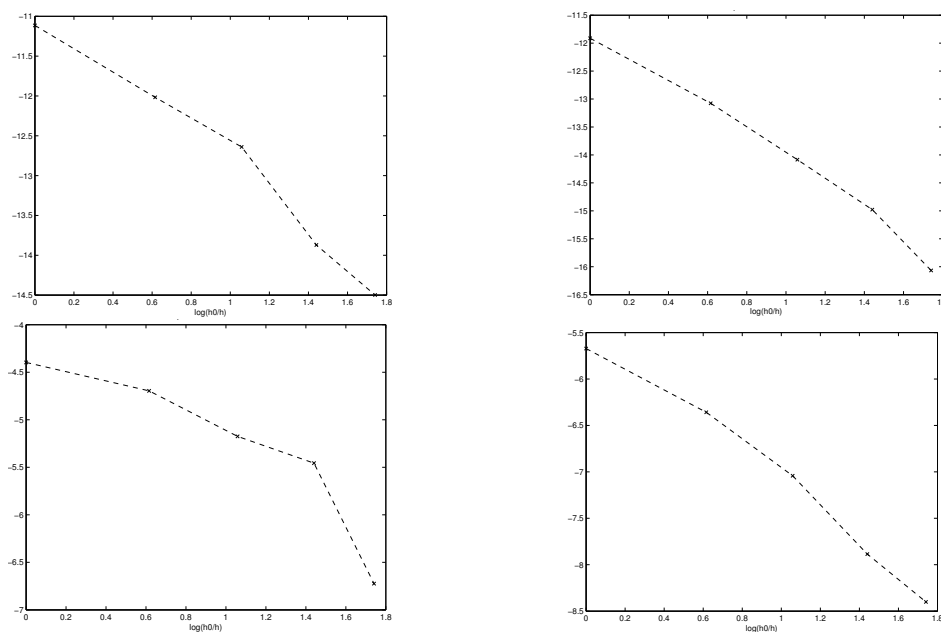


FIGURE 4.5 – Courbes de convergence des valeurs propres  $\lambda = -6.1058$ ,  $\lambda = -2.2689$ ,  $\lambda = 2.4044$ ,  $\lambda = 3.7541$ , calculées avec des éléments finis P2 pour  $\beta = 1$  et  $\kappa_\varepsilon = -13$ . Il faut s'assurer que les valeurs propres comparées sont bien associées au même mode (par représentation graphique par exemple).



### 4.3 Analyse numérique hors intervalle critique : approximation par éléments finis des problèmes de valeurs propres avec changement de signe

Dans cette section, nous souhaitons justifier la convergence de l'approximation par éléments finis pour les problèmes de valeurs propres avec changement de signe (dans la partie principale). Afin d'en simplifier la lecture, nous présentons les résultats dans le cas où l'opérateur est auto-adjoint (comme c'est le cas ici). Nous utiliserons en particulier les résultats de J.E. Osborn et I. Babuska [110, 4] sur l'approximation des valeurs propres d'opérateurs compacts. Nous rappelons quelques résultats, puis les adaptons pour l'approximation de (4.10) lorsque  $\kappa_\varepsilon \notin I_c$ . Afin d'utiliser les résultats du chapitre 2, nous allons faire le lien entre l'opérateur à domaine considéré précédemment, et un opérateur borné de  $V$  dans  $V'$ , où les espaces  $V, V'$  sont précisés ci-dessous.

#### 4.3.1 Résultats sur l'approximation des opérateurs compacts (auto-adjoints)

Les résultats présentés dans [110] concernent l'approximation des valeurs propres d'opérateurs compacts définis sur des espaces de Banach complexes (en accord avec ce qui précède, nous nous placerons ici dans des espaces de Hilbert).

Nous introduisons quelques notations : soit  $E$  un espace de Hilbert, complexe, de dimension infinie, muni du produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_E$  et l'on note  $\|\cdot\|_E$  la norme sur  $E$ . Soit  $B$  un opérateur auto-adjoint et compact de  $E$ . On considère une suite  $(B_\ell)_{\ell \geq 0}$  d'opérateurs (auto-adjoints) compacts de  $E$  qui converge vers  $B$  en norme d'opérateur  $\|\cdot\|_E := \sup_{x \in E, \|x\|_E=1} \|\cdot\|_E$ . Pour tout sous-espace fermé  $K$  de  $E$ , nous utiliserons la notation  $\|\cdot\|_K := \sup_{x \in K, \|x\|_E=1} \|\cdot\|_E$ . Pour une valeur propre  $\nu$  de  $B$ , on note  $E_\nu(B)$  l'espace propre associé à  $\nu$ .

**Théorème 4.3.** *Soit  $B$  un opérateur compact auto-adjoint de  $E$  et  $(B_\ell)_{\ell \geq 0}$  une suite d'opérateurs compacts auto-adjoints qui converge vers  $B$  en norme d'opérateur. Soit  $\nu \neq 0$  une valeur propre de  $B$  de multiplicité  $m$ . Soit  $(\phi_j)_{j=1,m}$  une base (orthonormée) de  $E_\nu(B)$ . Soit  $\delta > 0$  tel que le disque  $D_{\nu,\delta} := \{z \in \mathbb{C} : |z - \nu| \leq \delta\}$  ne contienne aucune autre valeur propre de  $B$ . Alors il existe  $L \geq 0$  et  $C^* > 0$  tels que pour tout  $\ell \geq L$ , il y a exactement  $m$  valeurs propres  $(\nu_\ell^j)_{j=1,m}$  de  $B_\ell$  dans  $D_{\nu,\delta}$ , et*

$$\left| \nu - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \nu_\ell^j \right| \leq \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m |(B - B_\ell)\phi_i, \phi_i)_E| + C^* \|(B - B_\ell)|_{E_\nu(B)}\|_E^2.$$

Avec le théorème 4.3 nous vérifions par l'absurde la

**Proposition 4.3. (Absence de pollution spectrale)** *Soit  $B$  un opérateur compact et  $(B_\ell)_{\ell \geq 0}$  une suite d'opérateurs compacts qui converge vers  $B$  en norme d'opérateur. Pour tout disque non vide  $D$  tel que  $D \cap \sigma(B) = \emptyset$ , il existe  $L \geq 0$  tel que, pour tout  $\ell \geq L$ ,  $B_\ell$  ne possède aucune valeur propre dans  $D$ .*

Les résultats d'Osborn s'appliquent aussi pour des opérateurs non auto-adjoints. Dans ce cas il faut travailler avec les espaces propres généralisés  $E_\nu(B)$  et l'estimation dans le théorème 4.3 fait intervenir l'adjoint  $B^*$  de  $B$  et  $(\phi_j^*)_{j=1,m}$  une base de  $E_{\bar{\nu}}(B^*)$  [110].

L'avantage certain de cette méthode d'approximation est qu'il n'y a pas de pollution spectrale, c'est-à-dire l'apparition de valeurs propres numériques parasites (voir par exemple [9, 90, 121]). Ce qui permet d'éviter la pollution spectrale ici est la convergence en norme de la suite d'opérateurs  $(B_\ell)_\ell$  vers  $B$ . Nous allons en expliquer les raisons ci-après.

Revenons à notre problème (4.10). Habituellement, lorsque  $\varepsilon > 0$ , on montre que  $A(\beta)$  est auto-adjoint, à résolvante compacte et borné inférieurement. On obtient même que  $B_0 := A(\beta)^{-1} : L_\mu^2(\Omega) \rightarrow L_\mu^2(\Omega)$  est bien défini, de plus il est auto-adjoint et compact. C'est donc les valeurs propres de  $B_0$  que l'on approche en suivant la méthode d'Osborn. En utilisant des éléments finis de Lagrange, on définit la suite  $(B_0^h)_h$  ( $h$  désignant le pas de maillage) d'opérateurs compacts discrets approchant  $B_0$ , et avec le lemme de Céa qui nous garantit l'optimalité de l'approximation nous avons bien convergence en norme de la suite  $(B_0^h)_h$  vers  $B_0$ . Ce qui évite la pollution spectrale c'est que, grâce aux résultats de type lemme de Céa, nous approchons  $B_0$  et non  $A(\beta)$  (à la différence de la situation traitée par M. Lewin et E. Séré [121]).

Dans notre cas, comme  $\varepsilon$  change de signe, d'une part nous savons que  $B_0$  n'est pas forcément défini, d'autre part garantir l'optimalité de l'approximation nécessite d'utiliser la T-coercivité (voir chapitre 2). Dans la section 4.2.2, nous avons introduit l'opérateur  $B_t := (A(\beta) - tI_{L_\mu^2(\Omega)})^{-1} : L_\mu^2(\Omega) \rightarrow L_\mu^2(\Omega)$ , avec  $t \in \mathbb{R} \setminus \sigma(A(\beta))$ . Nous avons montré par ailleurs que l'opérateur  $B_t$  est compact et auto-adjoint. C'est donc les valeurs propres de  $B_t$  que nous allons approcher (celles de  $A(\beta)$  s'en déduisant avec (4.14)). Pour utiliser directement les résultats du chapitre 2, nous introduisons quelques notations. Dans toute la suite nous noterons  $H := L_\mu^2(\Omega)$  et  $V := H_0^1(\Omega)$ . On définit  $V'$  le dual de  $V$  en utilisant  $H$  comme espace pivot.

**Remarque 4.5.** *De façon classique on définit  $H^{-1}(\Omega)$  le dual de  $H_0^1(\Omega)$  avec  $L^2$  comme espace pivot. Lorsque  $\mu \equiv 1$  on obtient bien  $V' = H^{-1}(\Omega)$ .*

Soit  $t \in \mathbb{R} \setminus \sigma(A(\beta))$ . On définit l'opérateur  $\widehat{B}_t : V' \rightarrow V$  tel que

$$B_t = i_{V \rightarrow H} \circ \widehat{B}_t \circ i_{H \rightarrow V'},$$

où  $i_{H \rightarrow V'}$  et  $i_{V \rightarrow H}$  sont les injections canoniques  $H \rightarrow V'$  et  $V \rightarrow H$ . Comme nous sommes en domaine borné, les injections  $H \hookrightarrow V'$  et  $V \hookrightarrow H$  sont compactes [31]. L'opérateur  $\widehat{B}_t^{-1} : V \rightarrow V'$  est bien défini (puisque  $B_t^{-1}$  l'est), et il est associé à la forme bilinéaire  $a(\beta; \cdot, \cdot)$  comme suit :

$$a(\beta; v; w) - t(v, w)_{\Omega, \mu} = {}_{V'} \langle \widehat{B}_t^{-1} v, w \rangle_V, \quad \forall v, w \in V$$

où  ${}_{V'} \langle \cdot, \cdot \rangle_V$  désigne le crochet de dualité  $V' \times V$ .

Dans le chapitre 2 nous avons vu comment approcher un problème de transmission mettant en jeu un opérateur du type  $\widehat{B}_t^{-1}$ . Plus précisément nous avons vu que si le problème discret est aussi bien posé (ce qui s'établit avec un opérateur  $T_h$  de T-coercivité), et que les maillages sont localement T-conformes, alors il y a optimalité de l'approximation (c'est-à-dire un résultat du type lemme de Céa). À partir de ce résultat il nous sera alors facile de vérifier que la suite  $(B_t^h)_h$  d'opérateurs compacts discrets converge en norme de cette suite vers  $B_t$ , puis de suivre [110]. C'est ce que nous faisons dans la section suivante.

### 4.3.2 Approximation du problème de valeurs propres

On rappelle que l'on cherche les valeurs propres de l'opérateur  $B_t$  dans la section  $\Omega$ , qui est un domaine borné composé d'une inclusion métallique  $\Omega_m$  entouré d'un diélectrique  $\Omega_d$ . L'interface entre les deux milieux est notée  $\Sigma$ .

On considère une famille régulière de maillages  $(\mathcal{T}_h)_h$  définis sur  $\overline{\Omega}$ , dont tous les triangles  $\tau$  sont tels que : soit  $\tau \subset \overline{\Omega_d}$  soit  $\tau \subset \overline{\Omega_m}$ . La famille définie est conforme dans  $V$ . On considère des Éléments Finis de Lagrange (de degré  $d$ ) et l'on définit les espaces discrets associés :

$$V^h := \{v \in V : v|_\tau \in \mathbb{P}(\tau), \forall \tau \in \mathcal{T}_h\},$$

avec  $\mathbb{P}(\tau)$  l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus  $d$  sur le triangle  $\tau$ . On définit  $h$  le pas de maillage,  $h := \max_{\tau \in \mathcal{T}_h} h_\tau$ , avec  $h_\tau$  le diamètre de  $\tau$ . Nous aurons aussi besoin des espaces fonctionnels définis sur  $\Omega_m$  et  $\Omega_d$  : soit  $V_d := \{v|_{\Omega_d}, v \in V\}$  et  $V_m := \{v|_{\Omega_m}, v \in V\}$ . Soit  $V_d^h$  (resp.  $V_m^h$ ) le sous-espace Éléments Finis de  $V_d$  (resp.  $V_m$ ) construit à partir de la triangulation  $\mathcal{T}_h$ .

Nous utiliserons la notation  $A \lesssim B$  pour l'inégalité  $A \leq CB$ , avec  $A$  et  $B$  deux quantités scalaires et  $C$  une constante générique, indépendante de la discrétisation, de la solution et de la donnée.

Dans un premier temps, nous donnons les résultats qui découlent directement du chapitre 2. Pour une donnée  $f \in V'$ , si l'on étudie le problème

$$\text{Trouver } u_t \in V \text{ tel que } \forall v \in V, \quad a(\beta; u_t, v) - t(u_t, v)_{\Omega, \mu} = v' \langle f, v \rangle_V, \quad (4.17)$$

et qu'on l'approche par la famille de problèmes discrets

$$\text{Trouver } u_t^h \in V^h \text{ tel que } \forall v^h \in V^h, \quad a(\beta; u_t^h, v^h) - t(u_t^h, v^h)_{\Omega, \mu} = v' \langle f, v^h \rangle_V, \quad (4.18)$$

alors nous avons optimalité de l'approximation en utilisant le théorème 2.3 :

**Théorème 4.4.** Soit  $\kappa_\varepsilon \notin I_c$ . Supposons que les maillages soient localement T-conformes. Alors pour  $h$  suffisamment petit, il existe une et une seule solution  $u_t^h$  de (4.18), avec

$$\|u_t - u_t^h\|_V \lesssim \inf_{v^h \in V^h} \|u_t - v^h\|_V,$$

où  $u_t$  est l'unique solution de (4.17).

Nous savons aussi comment en pratique s'assurer que les maillages soient localement T-conformes dans des géométries quelconques (avec coins, courbes) (voir section 2.4).

Pour  $u_t$  solution de (4.17), nous avons  $\widehat{B}_t f = u_t$ , et l'on définit  $\widehat{B}_t^h$  tel que  $\widehat{B}_t^h f := u_t^h$  est un élément de  $V$ . Ces éléments sont toujours définis si l'on choisit une donnée plus régulière,  $f \in H$  (cela revient à considérer  $\widehat{B}_t \circ i_{H \rightarrow V'}$ , que nous notons encore  $\widehat{B}_t$ ). Comme nous cherchons à approcher les valeurs propres, prenons  $f \in H$ . À partir du théorème 4.4 et des résultats de régularité des solutions, nous allons en déduire la convergence en norme de  $(B_t^h)_h$  (que l'on définit à partir de  $(\widehat{B}_t^h)_h$ ) vers  $B_t$ .

**★Étape 1 : estimer la norme  $\|B_t - B_t^h\|_H$ .** Pour ce faire, on estime d'abord la norme  $\|u_t - u_t^h\|_V$  en utilisant les résultats de régularité des éléments de  $D(A)$ , puis en utilisant le lemme d'Aubin-Nitsche on estime la norme  $\|u_t - u_t^h\|_{\Omega, \mu}$ .

Pour une donnée  $f \in H$ , on sait en fait que la solution de (4.17) est "plus régulière que  $H^1(\Omega)$ ". Dans chaque sous domaine  $\Omega_d, \Omega_m$ , ce sont des résultats classiques de régularité dans des domaines à frontière polygonale [55, 71]. Par ailleurs il est montré dans [39, §4] que pour des éléments de  $D(A)$  <sup>(2)</sup>, cette régularité ne dépend que de la géométrie et de  $\varepsilon$ . Pour cela on définit l'espace

$$PH^r(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\Omega_m} \in H^r(\Omega_m), v|_{\Omega_d} \in H^r(\Omega_d)\} \text{ pour } r > 1,$$

et l'on obtient le résultat de régularité globale suivant :

**Proposition 4.4.** Il existe  $\delta \in ]0, 1]$  tel que, pour  $J_\delta := ]0, \delta[$  si  $\delta < 1$ , resp.  $J_\delta := ]0, 1]$  si  $\delta = 1$ , nous avons  $D(A) \cap \cap_{s \in J_\delta} PH^{1+s}(\Omega)$ . De plus, pour  $s \in J_\delta$ ,

$$\forall v \in D(A), \quad \|v\|_{PH^{1+s}(\Omega)} \lesssim (\|v\|_{H^1(\Omega)} + \|\mu^{-1} \operatorname{div}(\varepsilon \nabla v)\|_{\Omega, \mu}).$$

---

2. Pour rappel  $D(A) := \{v \in H_0^1(\Omega) \mid \operatorname{div}(\varepsilon^{-1} \nabla v) \in L^2(\Omega)\}$ .

Pour  $s \in J_\delta$ , comme  $u_t \in V$  est tel que  $-\mu^{-1} (\operatorname{div}(\varepsilon^{-1} \nabla u_t) - \beta^2 \varepsilon^{-1} u_t) = f + t u_t \in H$ , on en déduit que  $\|u_t\|_{PH^{1+s}(\Omega)} \lesssim \|f\|_{\Omega, \mu}$ . En utilisant le théorème 4.4 et en choisissant  $v^h$  comme l'interpolée de  $u_t$  [61, Corollaires 1.1109 et 1.110], nous obtenons

$$\|u_t - u_t^h\|_V \lesssim \inf_{v^h \in V^h} \|u_t - v^h\|_V \lesssim h^s \|u_t\|_{PH^{1+s}(\Omega)} \lesssim h^s \|f\|_{\Omega, \mu}.$$

Nous voulons maintenant estimer  $\|u_t - u_t^h\|_{\Omega, \mu}$  pour donner une estimation de  $\|B_t - B_t^h\|_H$ , où  $B_t^h := i_{V \rightarrow H} \circ \widehat{B}_t^h$ . Pour cela, nous utilisons la même technique que le lemme d'Aubin-Nitsche [61, Lemme 2.31]. Ainsi pour  $s \in J_\delta$ , on gagne un facteur  $h^s$  :

$$\|u_t - u_t^h\|_{\Omega, \mu} \lesssim h^s \|u_t - u_t^h\|_V \lesssim h^{2s} \|f\|_{\Omega, \mu}.$$

Nous avons donc montré

$$\forall s \in J_\delta, \quad \sup_{f \in H, \|f\|_{\Omega, \mu}=1} \|(\widehat{B}_t - \widehat{B}_t^h)f\|_V \lesssim h^s \quad ; \quad \|B_t - B_t^h\|_H \lesssim h^{2s}.$$

**★Étape 2 : estimation d'erreur pour l'approximation des valeurs propres.** Nous pouvons désormais appliquer le théorème 4.3. Il nous faut simplement estimer les termes à droite dans l'estimation du théorème 4.3 en utilisant la régularité des fonctions de base des espaces propres.

Soit  $\nu$  une valeur propre de  $B_t$  de multiplicité  $m$ , soit  $(\phi_j)_{j=1, m}$  une base de  $E_\nu(B_t)$  et nous définissons

$$\delta_\nu := \sup\{r \geq \delta : \forall j = 1, m, \phi_j \in PH^{1+r}(\Omega)\}. \quad (4.19)$$

Comme sur l'espace propre discret  $E_\nu(B_t)$  toutes les normes sont équivalentes, pour une approximation EF d'ordre  $d$ , pour  $s_\nu \leq \min(d, \delta_\nu)$ ,

$$\forall j = 1, m, \quad \|(\widehat{B}_t - \widehat{B}_t^h)\phi_j\|_V \lesssim \inf_{v^h \in V^h} \|\nu^{-1}\phi_j - v^h\|_V \lesssim h^{s_\nu}.$$

Encore une fois en utilisant la technique de dualité d'Aubin-Nitsche on trouve pour  $s \in J_\delta$ ,

$$\forall j = 1, m, \quad \|(B_t - B_t^h)\phi_j\|_H \lesssim h^{s+s_\nu}.$$

Ainsi nous avons obtenu le

**Théorème 4.5.** *Soient  $\delta$  et  $J_\delta$  définis comme dans la proposition 4.4. Pour une valeur propre  $\nu$  de  $B_t$  de multiplicité  $m$ , soit  $(\phi_j)_{j=1, m}$  une base de  $E_\nu(B_t)$ ,  $D_\nu$  un disque centré en  $\nu$  ne contenant aucune autre valeur propre de  $B_t$ , et soit  $\delta_\nu$  l'exposant de régularité des vecteurs propres (4.19). Alors pour  $h$  suffisamment petit, il y a exactement  $m$  valeurs propres  $(\nu_j^h)_{j=1, m}$  de  $B_t^h$  dans  $D_\nu$ , et pour  $s \in J_\delta$ ,  $s_\nu < \min(d, \delta_\nu)$  ( $d$  étant l'ordre des éléments finis),*

$$\left| \nu - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \nu_j^h \right| \lesssim h^{s+s_\nu}.$$

Si l'on note  $\lambda$  la valeur propre de  $A(\beta)$  telle que  $\lambda = \nu^{-1} + t$  (voir (4.14)), alors les valeurs propres  $\lambda_j^h$  qui convergent vers  $\lambda$  quand  $h$  tend vers 0 sont données par  $(\nu_j^h)^{-1} + t$ , et l'on déduit l'estimation sur les valeurs propres de  $A(\beta)$  :

$$\left| \lambda - t - \left( \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (\lambda_j^h - t)^{-1} \right)^{-1} \right| \lesssim h^{s+s_\nu}.$$

Avant de passer aux illustrations numériques, nous terminons cette section par quelques commentaires.

- ★ En utilisant [110, théorème 5], nous en déduisons aussi les estimations d'erreur sur les vecteurs propres.
- ★ Pour établir ces résultats nous avons utilisé le fait que  $(B_t^h)_h$  est une suite d'opérateurs compacts qui converge en norme vers  $B_t$ . Les résultats de [110] s'appliquent toujours si la suite tend seulement ponctuellement vers l'opérateur du problème continu et qu'elle est *collectivement* compacte (c'est-à-dire que l'ensemble  $\{(B_h^t f)_h, f \in H\}$  est relativement compacte). La convergence en norme implique ces conditions, et elle permet en outre facilement d'estimer  $\|B_t - B_t^h\|_H$ .
- ★ Nous aurions pu choisir  $t \in \mathbb{C}$ . Dans ce cas il faut aussi appliquer le lemme d'Aubin-Nitsche à l'adjoint de  $B_t$  (qui n'est rien d'autre que  $B_{\bar{t}}$ ).
- ★ L'utilisation de  $B_t$  ne constitue qu'un outil théorique, ce qui importe ici c'est l'optimalité de l'approximation. En pratique nous discrétisons par Éléments Finis la formulation variationnelle (4.11) et approchons directement les valeurs propres de  $A(\beta)$ .

### 4.3.3 Illustrations numériques : modes d'une cavité et maillages T-conformes

Dans cette section, on souhaite approcher les valeurs propres de (4.10) dans une cavité hexagonale avec une inclusion métallique hexagonale (voir Figure 4.6), pour un contraste hors intervalle critique. Dans cette configuration il est facile de construire un maillage T-conforme et de comparer les résultats, comme dans le chapitre 2, avec ceux obtenus sur un maillage quelconque. Cette partie sert à illustrer les estimations d'erreurs que nous avons obtenues dans la section 4.3.2.

Nous choisissons  $\beta = 0$ , si bien que le problème se réduit à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u, \lambda) \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} \times \mathbb{C} \text{ tels que :} \\ -\mu^{-1} \operatorname{div}(\varepsilon^{-1} \nabla u) = \lambda u \quad \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (4.20)$$

L'avantage de ce choix est que la forme bilinéaire associée à (4.20) est T-coercive (l'opérateur associé est un isomorphisme). En effet, de par la simplicité de la géométrie, nous savons créer un opérateur T global, c'est-à-dire dont l'action n'est pas limitée qu'au voisinage de l'interface. Il suffit de définir T à l'aide de pavages comme dans la section 2.3 (voir aussi 2.A.1), et l'on montre que la forme bilinéaire associée à (4.20) est T-coercive, donc le problème est bien posé (cf. corollaire 2.1). Nous pouvons alors discrétiser (4.20) avec des éléments finis. Dans cette géométrie, tous les coins  $\mathbf{c}_i$  ( $i = 1, 6$ ) sont localement des secteurs d'angle  $2\pi/3$  dans  $\Omega_m$ , et l'intervalle critique vaut  $I_c := [-2; -1/2]$  dans ce cas. Nous avons tracé les courbes de convergence pour l'approximation des premières valeurs propres pour des éléments finis d'ordre  $d$  ( $d = 1, 2, 3$ ), pour un contraste  $\kappa_\varepsilon = -2.1$  ( $\varepsilon_m = -2.1$  et  $\varepsilon_d = \mu_d = \mu_m = 1$ ). Nous comparons les courbes d'erreurs obtenues sur des maillages quelconques avec celles pour des maillages T-conformes, pour deux valeurs propres positives et deux valeurs propres négatives (voir Figure 4.8). Les simulations ont été réalisées à l'aide du logiciel libre FREEFEM ++.

Pour chaque valeur propre  $\lambda$ , on note  $\lambda_h^d$  la valeur propre approchée avec des éléments finis d'ordre  $d$  ( $d = 1, 2, 3$ ). Comme nous ne connaissons pas analytiquement les valeurs propres de l'opérateur, pour chaque valeur propre nous traçons l'erreur  $|\lambda_h^d - \lambda_{h_{\min}}^3|$ ,  $d = 1, 2, 3$ , en fonction du pas de maillage  $h$  en échelle logarithmique. Ci-dessus,  $\lambda_{h_{\min}}^3$  représente la valeur propre obtenue avec le maillage le plus fin (de pas de maillage  $h_{\min}$ ) avec des éléments finis d'ordre 3. Comme  $\varepsilon$  change de signe, nous avons des valeurs propres positives et négatives, et encore une fois, nous pouvons observer l'importance d'utiliser des maillages T-conformes. En utilisant des maillages standards, pour chaque  $\lambda$  l'erreur  $\log |\lambda_h^d - \lambda_{h_{\min}}^3|$  oscille fortement en fonction de  $h$ , les résultats de la Figure 4.8 pour les valeurs propres négatives semblent même ne pas converger. En revanche, en utilisant des maillages T-conformes, l'erreur  $\log |\lambda_h^d - \lambda_{h_{\min}}^3|$  diminue bien en fonction du pas de maillage  $h$ . Notons aussi que les vitesses de convergence pour chaque ordre sont similaires : cela signifie que la régularité des vecteurs propres  $(\phi_j)_{j=1,m}$  (donnée par

$\delta_\lambda$ ) est plus faible que le degré  $d$  des Éléments Finis (soit  $\delta_\lambda < 1$ ).

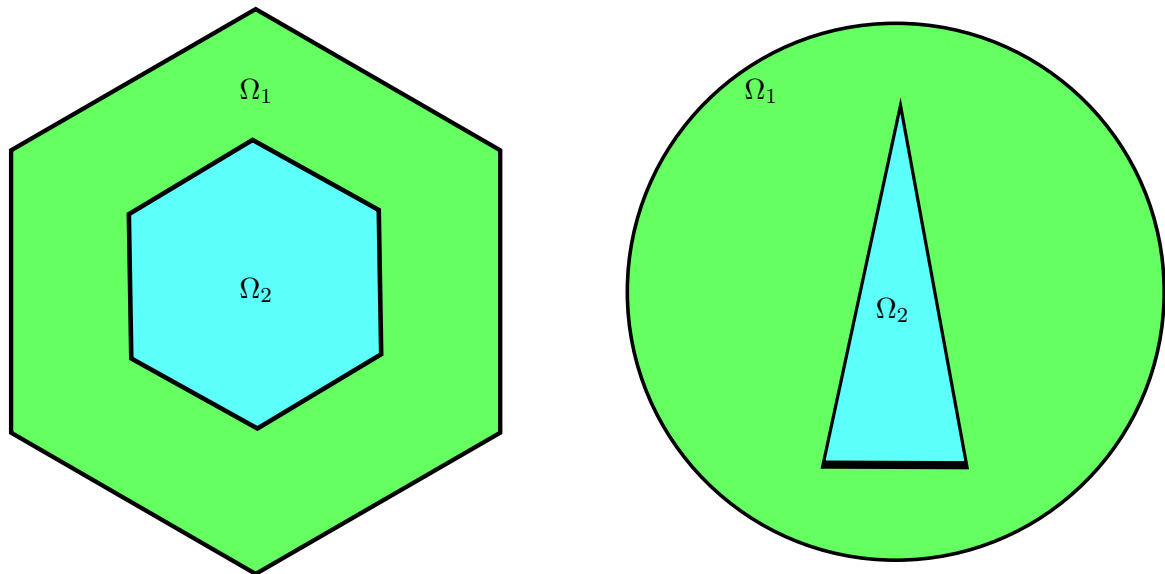


FIGURE 4.6 – Géométries considérées pour les illustrations numériques.

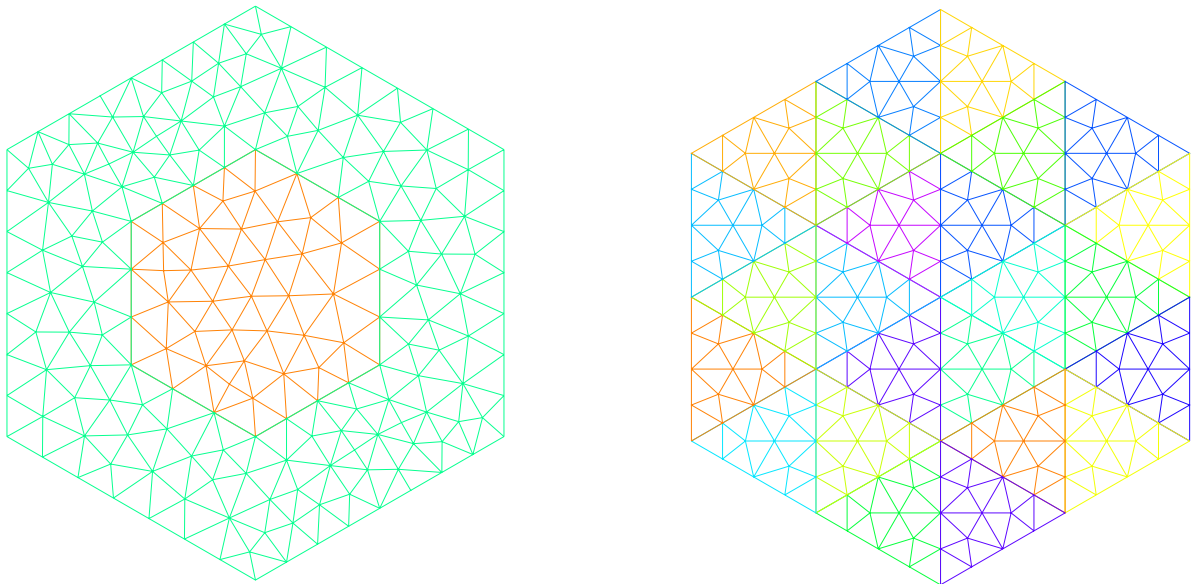


FIGURE 4.7 – Gauche : exemple de maillage standard obtenu avec GMSH. Droite : exemple de maillage T-conforme.

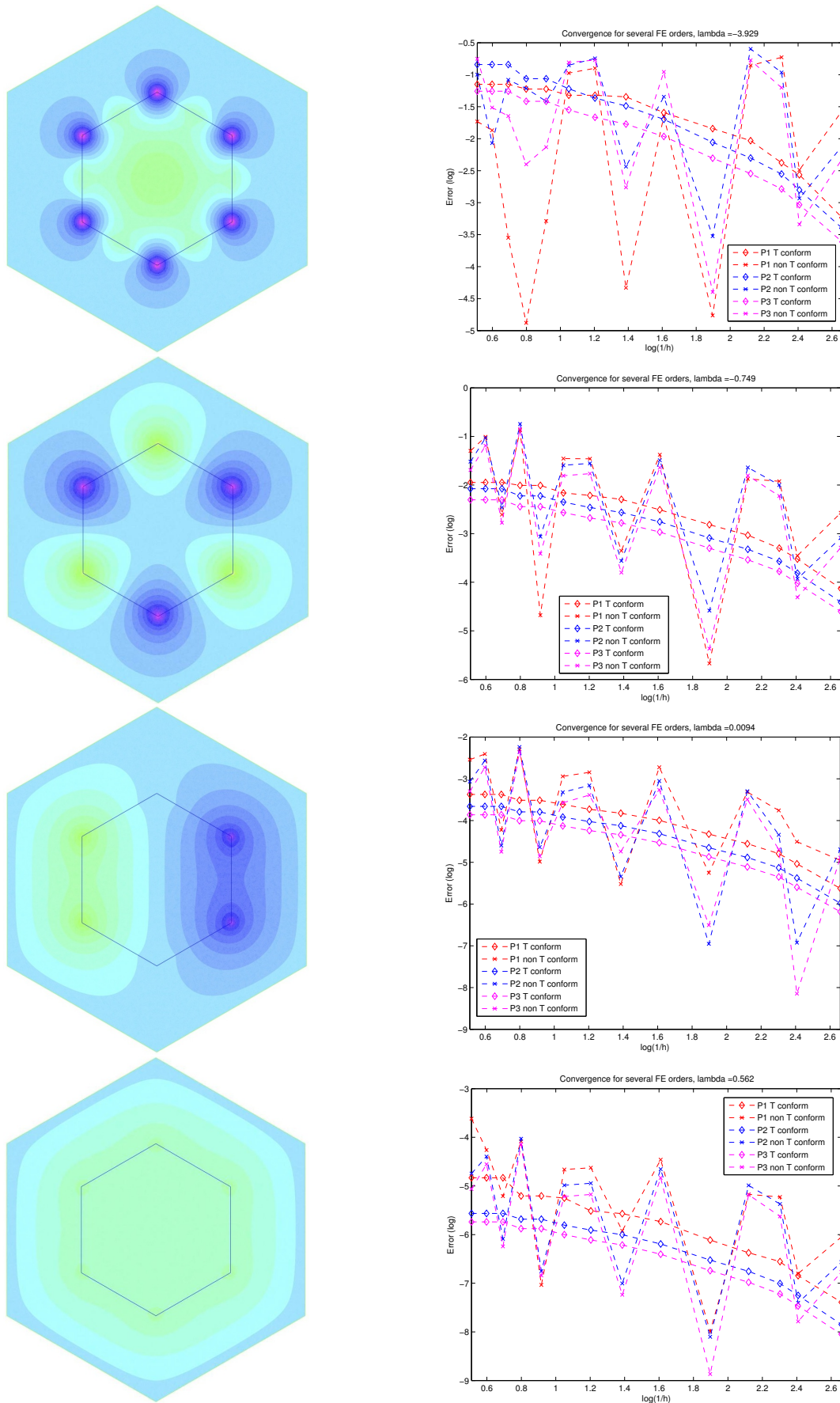


FIGURE 4.8 – Colonne de gauche : représentation des modes associés à  $\lambda = -3.929$ ,  $\lambda = -0.749$ ,  $\lambda = 0.0094$  et  $\lambda = 0.562$ . Colonne de droite : courbes de convergence associées à ces valeurs propres pour différents ordres d'EF. On compare les résultats obtenus avec des maillages standards et des maillages T-conformes. Les modes associés aux valeurs propres négatives sont plus singuliers aux coins.

## 4.4 Cas d'un contraste dans l'intervalle critique

Lorsque  $\kappa_\varepsilon \in I_c$ , nous allons voir que l'opérateur  $A(\beta)$  est ni auto-adjoint ni à résolvante compacte, et qu'en fait son spectre est tout le plan complexe. Nous avons vu dans le chapitre précédent que lorsque  $\kappa_\varepsilon \in I_c$ , apparaissent des singularités aux coins qui ne sont pas dans  $H^1(\Omega)$ . Ce sont des fonctions singulières de la forme  $s(r, \theta) = r^{i\eta}\Phi(\theta)$ ,  $\eta \in \mathbb{R}$ ,  $(r, \theta)$  désignant les coordonnées polaires centrées au coin (voir (3.22)-(3.23) pour l'expression de  $\Phi$ ), telles que  $\operatorname{div}(\varepsilon^{-1}\nabla s) = 0$ . Ce sont ces singularités qui font perdre le caractère auto-adjoint et à résolvante compacte.

★ L'opérateur  $A(\beta)$  est non auto-adjoint. Nous devons ce résultat à K. Ramdani [119]. En effet, en procédant exactement de la même façon que dans la preuve de [119, Théorème 7.25], on montre que ces fonctions singulières sont telles que  $s \in D(A^*) \setminus \overline{D(A)}$ , ce qui permet de conclure que  $A(\beta)$  est non auto-adjoint (les domaines de  $A(\beta)$  et  $A(\beta)^*$  ne sont pas les mêmes). La seule différence est que le résultat de [119] est présenté pour le cas d'un angle droit (où l'on connaît explicitement l'expression de la singularité), cependant l'expression exacte des exposants de singularités n'est pas nécessaire. Il suffit de savoir qu'elles existent, et de connaître le signe de  $\int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon^{-1}\Phi^2$  (que nous connaissons avec le lemme 3.4).

★ Montrons que  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \subset \sigma(A(\beta))$  pour un contraste  $\kappa_\varepsilon \in I_c \setminus \{-1\}$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ . On remarque que  $A(\beta)$  est symétrique ( $\beta \in \mathbb{R}$ ) donc pour tout  $u \in D(A)$  nous avons

$$\Im((A(\beta)u - \lambda u, u)_{\Omega, \mu}) = -\Im(\lambda)\|u\|_{\Omega, \mu}^2.$$

Par Cauchy-Schwarz nous avons donc

$$\|u\|_{\Omega, \mu} \leq |\Im(\lambda)|^{-1} \|A(\beta)u - \lambda u\|_{\omega, \mu}, \quad \forall u \in D(A).$$

Ceci prouve que  $A(\beta) - \lambda I_{L_\mu^2(\Omega)}$  est injectif. Donc  $\lambda$  n'est pas valeur propre de  $A(\beta)$  mais peut faire partie du spectre essentiel. Il suffit pour cela de montrer que  $A(\beta) - \lambda I_{L_\mu^2(\Omega)}$  est non surjectif [60]. Pour cela, nous allons utiliser en partie les résultats de la section 3.3.5, et raisonner par l'absurde. Certains résultats seront justifiés dans la section suivante, nous donnons principalement les idées.

Soit  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  telle que  $\Im(\lambda) > 0$ . On considère la singularité  $s^-(r, \theta) = r^{-i\eta}\Phi(\theta)$ ,  $\eta > 0$  décrite ci-dessus et une fonction de troncature  $\chi \in C_0^\infty(\Omega, [0, 1])$  égale à 1 au voisinage du coin. Soit  $f^- := -\mu^{-1}(\operatorname{div}(\varepsilon^{-1}\nabla\chi s^-) - \beta^2\varepsilon^{-1}\chi s^-) - \lambda\chi s^-$ , alors  $f^- \in L_\mu^2(\Omega)$ . Si  $\lambda$  n'est pas dans le spectre essentiel, alors  $A(\beta) - \lambda I_{L_\mu^2(\Omega)}$  est bijectif, donc il existe un unique  $u_0 \in D(A)$  tel que  $-\mu^{-1}(\operatorname{div}(\varepsilon^{-1}\nabla u_0) - \beta^2\varepsilon^{-1}u_0) - \lambda u_0 = f^-$ . Or, lorsque  $\kappa_\varepsilon \in I_c \setminus \{-1\}$ , avec la remarque 3.3 et la proposition 3.4, on peut montrer de façon similaire (voir lemme 4.2) que le problème

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \text{ tel que :} \\ -\mu^{-1}(\operatorname{div}(\varepsilon^{-1}\nabla u) - \beta^2\varepsilon^{-1}u) - \lambda u = f^- \quad \text{dans } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{array} \right. \quad (4.21)$$

admet une unique solution qui se décompose de la forme  $u = b\chi s^- + \tilde{u}$ ,  $b \in \mathbb{C}$ ,  $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$  (on rappelle que  $\tilde{u}$  est en fait plus régulier). Comme  $s^- \notin D(A)$ , on aboutit à une contradiction donc  $A(\beta) - \lambda I_{L_\mu^2(\Omega)}$  n'est pas surjectif. On effectue de même pour  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  telle que  $\Im(\lambda) < 0$ , en considérant  $s^+(r, \theta) = r^{i\eta}\Phi(\theta)$ ,  $f^+ := -\mu^{-1}(\operatorname{div}(\varepsilon^{-1}\nabla\chi s^+) - \beta^2\varepsilon^{-1}\chi s^+) - \lambda\chi s^+$ . Dans ce cas on montre que le problème (4.21) avec la donnée  $f^+$  admet une unique solution qui se décompose de la forme  $u = b\chi s^+ + \tilde{u}$ ,  $b \in \mathbb{C}$ ,  $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$ .

★ Il ne reste plus qu'à montrer que  $\mathbb{R} \subset \sigma(A(\beta))$ . On raisonne encore par l'absurde. Supposons qu'il existe un réel  $t$  tel que  $(A(\beta) - tI_{L_\mu^2(\Omega)})^{-1}$  soit bien défini, soit  $t \in \rho(A(\beta))$ . Alors en reprenant le raisonnement de la preuve du théorème 4.2, par l'injection compacte de  $H_0^1(\Omega)$  dans  $L_\mu^2(\Omega)$  on en



déduit que  $A(\beta)$  est à résolvante compacte. En conséquence son spectre est un ensemble discret de valeurs propres de multiplicité finie. Comme  $A(\beta)$  possède du spectre essentiel ( $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \subset \sigma_{\text{ess}}(A(\beta))$ ), ce n'est pas possible donc l'opérateur n'est pas à résolvante compacte et  $\sigma(A(\beta)) = \sigma_{\text{ess}}(A(\beta)) = \mathbb{C}$ .

**Théorème 4.6.** *Soit  $\kappa_\varepsilon \in I_c \setminus \{-1\}$ . Alors l'opérateur  $A(\beta)$  n'est ni auto-adjoint, ni à résolvante compacte et*

$$\sigma(A(\beta)) = \mathbb{C}.$$

**Remarque 4.6.** *Habituellement, une idée pour caractériser le spectre essentiel est de construire, pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$ , une suite singulière (suites de Weyl)  $(u_n)_n$  telle que pour tout  $n$ ,  $u_n \in D(A)$ ,*

$$\|u_n\|_\Omega = 1 \quad \text{et} \quad \|A(\beta)u_n - \lambda u_n\|_\Omega \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

*Si en plus  $u_n$  tend faiblement vers 0 dans  $L^2$  alors c'est ce qui caractérise le spectre continu. Pour cela on essaie généralement de construire une suite à partir de la singularité  $s$  que l'on régularise (avec une fonction de troncature) pour que  $u_n \in D(A)$ . Travailler avec des singularités de coins complique le choix de cette fonction de troncature. Nous renvoyons aux travaux de S. Nazarov et J. Taskinen [102] pour un exemple. Ici ce n'est pas la technique à privilégier puisque nous avons trouvé que tout le spectre est en fait du spectre résiduel (l'image de  $A(\beta) - \lambda I_{L_\mu^2(\Omega)}$  n'est pas dense dans  $L_\mu^2(\Omega)$ ). On peut montrer que l'image de  $A(\beta) - \lambda I_{L_\mu^2(\Omega)}$  est fermée puisque le problème (4.21) est bien posé (voir lemme 4.2).*

Tâchons donc de prendre en compte les singularités pour récupérer du spectre discret, notre but étant de calculer les modes guidés.

#### 4.4.1 Extension non auto-adjointe

On suppose dans toute cette section que l'interface  $\Sigma$  ne possède qu'un seul coin  $\mathbf{c}$  d'angle  $\phi$  dans  $\Omega_m$ . Nous utilisons les mêmes notations que celles utilisées dans la section 3.3. D'après ce qui précède pour  $\kappa_\varepsilon \in I_c \setminus \{-1\}$ , l'opérateur  $A(\beta)$  est non auto-adjoint ni à résolvante compacte à cause de l'apparition de deux singularités  $s^\pm = r^{\pm i\eta} \Phi$  au coin qui ne sont pas dans le domaine de l'opérateur. Au chapitre 3 nous avons vu qu'une manière de retrouver un problème bien posé était de ne prendre en compte que celle qui n'apporte pas d'énergie supplémentaire au système dans la décomposition de la solution (voir section 3.3.5). Ce résultat est aussi la conséquence du principe d'absorption limite. Nous allons donc suivre la même démarche, et prendre en compte la singularité sortante,  $s^{\text{out}}(r, \theta) = r^{\lambda^{\text{out}}} \Phi(\theta)$  (la singularité entrante étant notée  $s^{\text{in}}$ , cf. 3.3.3), dans le domaine de l'opérateur étendu. Ainsi on considère l'opérateur

$$\left| \begin{array}{l} \mathfrak{A}(\beta) : D(\mathfrak{A}) \rightarrow L_\mu^2(\Omega), \quad D(\mathfrak{A}) := D(A) \oplus \text{vect}\{\chi_\rho s^{\text{out}}\} \\ \mathfrak{A}(\beta)u := -\mu^{-1} (\text{div}(\varepsilon^{-1} \nabla u) - \beta^2 \varepsilon^{-1} u). \end{array} \right.$$

Ci-dessus,  $\chi_\rho \in C_0^\infty([0, 1])$  est une fonction de troncature valant 1 au voisinage de  $\mathbf{c}$  et 0 ailleurs : par exemple  $\chi_\rho(r) = 1$  pour  $r < \rho/2$  et  $\chi_\rho(r) = 0$  pour  $r > \rho$ , avec  $\rho > 0$  le rayon du disque  $D_\rho$  centré en  $\mathbf{c}$  désignant le voisinage du coin. La fonction  $\chi_\rho$  sert simplement à assurer que la condition aux limites de Dirichlet est vérifiée sur  $\partial\Omega$ .

Notons que d'après les résultats de [119, chapitre 7] (voir aussi [42]), nous savons que

$$D(A^*) = D(A) \oplus \text{vect}\{\chi_\rho s^{\text{out}}, \chi_\rho s^{\text{in}}\}.$$

On peut d'ores et déjà remarquer que l'extension choisie est non auto-adjointe puisque nous ne prenons pas en compte les deux singularités. Nous verrons par la suite que procéder à une extension

non auto-adjointe est plutôt dans notre intérêt pour faciliter le calcul des modes guidés (nous y reviendrons). Nous renvoyons à [42] pour l'étude des extensions auto-adjointes : nous mentionnons que pour être auto-adjoint il faut choisir une combinaison linéaire particulière des deux singularités.

**Remarque 4.7.** *Encore une fois, le bon cadre fonctionnel correspond aux espaces de Sobolev à poids, et nous renvoyons à [102, 18, 42]. Travailler dans ce cadre fonctionnel permet d'être plus fin pour caractériser le comportement de la partie "régulière" des modes. Nous utiliserons ce critère plus précis, comme pour le chapitre 3, dans le calcul des flux d'énergie.*

*On rappelle que de façon générale, 0 appartient à l'ensemble des exposants de singularités, ce qui veut dire que la singularité constante est présente. Cette singularité appartient à  $D(A)$  tandis que  $s^{\text{out}} \notin D(A)$ . Dans le cas où l'on travaille avec les espaces de Sobolev à poids, la singularité constante est à prendre en compte à part entière, ne faisant plus partie de la partie "régulière" de la solution.*

Nous allons montrer que l'opérateur étendu est à résolvante compacte. Ce résultat repose sur le fait que le problème (4.21) est bien posé.

**Lemma 4.2.** *Soit  $f \in L^2(\Omega)$ . Soit  $\lambda^\pm \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  tels que  $\Im m(\lambda^+) > 0$  et  $\Im m(\lambda^-) < 0$ . Le problème*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u = b\chi_\rho s^\mp + \tilde{u}, b \in \mathbb{C}, \tilde{u} \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ -\mu^{-1}(\text{div}(\varepsilon^{-1}\nabla u) - \beta^2\varepsilon^{-1}u) - \lambda^\pm u = f \quad \text{dans } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{array} \right. \quad (4.22)$$

*admet une unique solution. De plus il existe  $C > 0$  indépendante de la donnée  $f$  telle que*

$$|b| + \|\tilde{u}\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C\|f\|_{\Omega, \mu}.$$

**Preuve.** Nous faisons la preuve en considérant  $\lambda^+$  (et donc la solution se décompose sous la forme  $u = b\chi_\rho s^- + \tilde{u}$ ), l'autre cas s'effectuant de la même façon. Comme au chapitre 3, nous n'aborderons pas la question de l'existence de la solution, qui a déjà été traitée dans [18] (voir aussi [38, Chapitre 5]) pour le cas  $\beta = 0, \lambda = 0$ . En utilisant les injections compactes des espaces à poids, on montre que  $u \mapsto \beta^2\varepsilon^{-1}\mu^{-1}u - \lambda^+u$  est un opérateur compact. Cela repose sur le fait que pour tout  $u$  se décomposant de la forme  $u = \chi_\rho(a + bs^-) + \tilde{u}$ , avec  $a, b \in \mathbb{C}$  et  $\tilde{u}$  tel que  $r^{1-\alpha}\tilde{u} \in L^2(\Omega)$  (pour  $\alpha > 0$  bien choisi), nous avons

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} (\beta^2\varepsilon^{-1} - \lambda^+\mu)u\bar{v} \, d\mathbf{x} \right| &\leq C \int_{\Omega} |\chi_\rho(a + bs^{\text{out}})\bar{v}| \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} |\tilde{u}\bar{v}| \, d\mathbf{x} \\ &\leq C((|a| + |b|)\|r^{1-\alpha}\|_{\Omega} + \|r^{1-\alpha}\tilde{u}\|_{\Omega}) \|r^{\alpha-1}v\|_{\Omega}, \quad \forall r^{\alpha-1}v \in L^2(\Omega). \end{aligned}$$

En suivant ensuite exactement le même raisonnement que celui effectué dans la preuve du théorème 4.4 de [18] on montre alors que le problème (4.21) est Fredholm. La seule différence vient de la géométrie considérée : dans le cas traité dans [18] on considère un secteur d'angle  $\pi/2$  où l'expression des singularités (et de leurs exposants) est connue. Grâce à la caractérisation donnée dans la section 3.3, tout se déroule de la même façon. La preuve est relativement longue et technique, nous laissons le lecteur consulter [38, Chapitres 3,5] [18] pour plus de détails.

La preuve de l'unicité peut s'effectuer encore une fois avec des arguments énergétiques. On considère le domaine perforé  $\Omega \setminus \overline{D_\rho}$ . Soit  $u = b\chi_\rho s^- + \tilde{u}$ ,  $b \in \mathbb{C}$ ,  $\tilde{u}$  "régulière", solution de (4.22) avec  $f = 0$ , montrons que  $u = 0$ . Par la formule de Green nous obtenons

$$\int_{\Omega \setminus \overline{D_\rho}} \varepsilon^{-1}|\nabla u|^2 \, d\mathbf{x} + \beta^2 \int_{\Omega \setminus \overline{D_\rho}} \varepsilon^{-1}|u|^2 \, d\mathbf{x} + \int_{\partial D_\rho} \varepsilon^{-1}\partial_r u \bar{u} \, d\sigma = \lambda^+ \int_{\Omega \setminus \overline{D_\rho}} \mu|u|^2 \, d\mathbf{x}.$$

Comme  $\beta \in \mathbb{R}$ , en passant à la limite ( $\rho \rightarrow 0$ ) et en utilisant le lemme 3.3 (voir les détails de la section 3.6.3) on obtient

$$-|b|^2 \eta \left| \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon^{-1} \Phi(\theta)^2 d\theta \right| = \Im m(\lambda^+) \|u\|_{\Omega, \mu}^2.$$

Comme  $\Im m(\lambda^+) > 0$ ,  $\eta > 0$  et  $\int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon^{-1} \Phi(\theta)^2 d\theta \neq 0$  (voir lemme 3.4), on en déduit que  $b = 0$  et nécessairement  $u = 0$ .  $\square$

Nous pouvons maintenant montrer le

**Théorème 4.7.** *Soit  $\beta \in \mathbb{R}$ ,  $\kappa_\varepsilon \in I_c \setminus \{-1\}$ . L'opérateur  $\mathfrak{A}(\beta)$  est à résolvante compacte.*

**Preuve.** Il suffit d'utiliser le lemme 4.2 avec la "bonne" singularité. On rappelle que d'après la proposition 3.3,  $s^{\text{out}}$  est égale à  $s^-$  si l'angle au coin est tel que  $0 < \phi < \pi$ , et égale à  $s^+$  si  $\pi < \phi < 2\pi$ . Pour utiliser la même terminologie, on notera donc  $\lambda^{\text{in}} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  le scalaire utilisé dans (4.22). D'après le lemme 4.2, l'opérateur  $\mathfrak{B}_{\lambda^{\text{in}}} := (\mathfrak{A}(\beta) - \lambda^{\text{in}} I_{L_\mu^2(\Omega)})^{-1} : L_\mu^2(\Omega) \rightarrow L_\mu^2(\Omega)$  est bien défini (remarquer que  $u = b\chi_\rho s^{\text{out}} + \tilde{u} \in D(\mathfrak{A})$ ). Montrons que c'est un opérateur compact. Soit  $(f_n)_n$  une suite bornée de  $L_\mu^2(\Omega)$ , d'après le lemme 4.2 il existe un unique  $u_n \in D(\mathfrak{A})$  de la forme  $u_n = b_n \chi_\rho s^{\text{out}} + \tilde{u}_n$ ,  $b_n \in \mathbb{C}$  et  $\tilde{u}_n \in H_0^1(\Omega)$ , tel que  $u_n = \mathfrak{B}_{\lambda^{\text{in}}} f_n$ , et il existe  $C > 0$  telle que  $|b_n| + \|\tilde{u}_n\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \|f_n\|_{\Omega, \mu}$ . Comme  $(b_n)_n$  est bornée dans  $\mathbb{C}$  et  $(\tilde{u}_n)_n$  est bornée dans  $H_0^1(\Omega)$ , on peut en extraire à chacune une sous-suite qui converge dans  $L_\mu^2(\Omega)$ , ce qui revient à extraire une sous-suite de  $(\mathfrak{B}_{\lambda^{\text{in}}} f_n)_n$  qui converge dans  $L_\mu^2(\Omega)$ .  $\square$

Nous en déduisons que le spectre  $\sigma(\mathfrak{A}(\beta))$  de  $\mathfrak{A}(\beta)$  est donc composé de valeurs propres complexes de multiplicité finie. En travaillant dans le domaine augmenté  $D(\mathfrak{A}) := D(A) \oplus \text{vect}\{\chi_\rho s^{\text{out}}\}$ , nous récupérons d'une part un spectre discret, d'autre part des valeurs propres qui peuvent exciter la singularité  $s^{\text{out}}$ . Rappelons que nous cherchons les modes de  $A(\beta)$ . Il suffit donc de trier les modes qui excitent la singularité ( $\notin D(A)$ ) des autres. Pour ce faire, nous effectuons un bilan d'énergie dans la section suivante.

Nous terminons cette section par quelques remarques.

**Remarque 4.8.** *Nous avons choisi de travailler dans le domaine étendu qui prend en compte la "bonne" singularité. D'un point de vue théorique on pourrait très bien étendre l'opérateur  $A(\beta)$  dans  $\text{vect}\{\chi_\rho s^{\text{in}}\} \oplus D(A)$  ou encore dans  $\text{vect}\{\chi_\rho (s^{\text{out}} + \gamma s^{\text{in}})\} \oplus D(A)$ ,  $\gamma \in \mathbb{C}$ . On peut montrer dans ce cas que si  $|\gamma| = 1$  alors l'opérateur étendu est auto-adjoint, et que son spectre est discret, tandis que si  $|\gamma| \neq 1$  alors l'opérateur est non auto-adjoint. Le lecteur peut notamment consulter [42, proposition 3.6].*

**Remarque 4.9.** *Comme l'opérateur n'est pas auto-adjoint, nous ne pouvons ni caractériser les valeurs propres à l'aide d'une formule de Min-Max, ni utiliser l'image numérique de  $\mathfrak{A}(\beta)$ .*

#### 4.4.2 Bilan d'énergie : tri des valeurs propres dans le plan complexe

D'après le chapitre précédent, lorsque l'onde de trou noir est excitée, elle piège de l'énergie au coin, se traduisant par un flux d'énergie non nul. Dans cette section, nous effectuons un bilan d'énergie de même type que dans le lemme 4.2 pour distinguer les modes qui excitent la singularité des autres. D'après ce qui précède on en déduit directement le

**Lemme 4.3.** *Soit  $\beta \in \mathbb{R}$ ,  $\kappa_\varepsilon \in I_c \setminus \{-1\}$ . Si  $(u, \omega^2) \in D(\mathfrak{A}(\beta)) \setminus \{0\} \times \mathbb{C}$  est une paire vecteur propre et valeur propre de  $\mathfrak{A}(\beta)$ ,  $u$  pouvant s'écrire*

$$u = b s^{\text{out}} \chi_\rho + u_A, \quad \text{avec } b \in \mathbb{C} \text{ et } u_A \in D(A), \quad s^{\text{out}}(r, \theta) = r^{\lambda^{\text{out}}} \Phi(\theta), \quad \lambda^{\text{out}} \neq 0 \text{ défini dans la table 3.1,}$$

alors

$$-|b|^2 \left| \lambda^{\text{out}} \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon^{-1} \Phi(\theta)^2 d\theta \right| = \Im m(\omega^2) \|u\|_{\Omega, \mu}^2. \quad (4.23)$$

La quantité à gauche dans (4.23) est toujours négative ou nulle, et l'on remarque que :

- ★ Si  $\omega^2 \in \mathbb{R}$  : comme  $\int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon^{-1} \Phi^2 d\theta \neq 0$  on en déduit forcément que  $b = 0$ . Cela signifie que  $u = u_A \in D(A)$  : les valeurs propres réelles n'excitent pas les ondes de trou noir !
- ★ Si  $\omega^2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  : la singularité est excitée, et toutes les valeurs propres sont telles que  $\Im m(\omega^2) < 0$ .

Le point surprenant ici est le suivant : pour pouvoir obtenir les valeurs propres de  $A(\beta)$  lorsque  $\kappa_\varepsilon \in I_c \setminus \{-1\}$ , il a fallu étendre l'opérateur en ajoutant un élément n'appartenant pas à  $D(A)$ , et cette opération a permis de trier les valeurs propres dans le plan complexe. Ainsi les valeurs propres réelles sont dans le spectre de  $A(\beta)$  tandis que les valeurs propres complexes sont intrinsèques à  $\mathfrak{A}(\beta)$ .

Comme les modes associés aux valeurs propres réelles sont dans  $D(A)$ , le spectre réel de  $\mathfrak{A}(\beta)$  donne naissance à des modes propagatifs ou évanescents en temps, et les modes guidés de  $A(\beta)$  sont associés aux valeurs propres réelles positives. Que peut-on dire de plus sur les modes associés aux valeurs propres complexes ? En reprenant en compte la dépendance harmonique en temps, les modes associés à  $\omega^2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  sont de la forme

$$e^{\Im m(\omega)t} (e^{-i\eta \ln r} \Phi(\theta) + u_A) e^{i(\beta z - \Re e(\omega)t)}$$

au voisinage du coin. Comme  $\Im m(\omega^2) < 0$ ,  $\Im m(\omega) < 0$  : les modes se propagent dans le guide avec atténuation en temps (voir Figure 4.9).

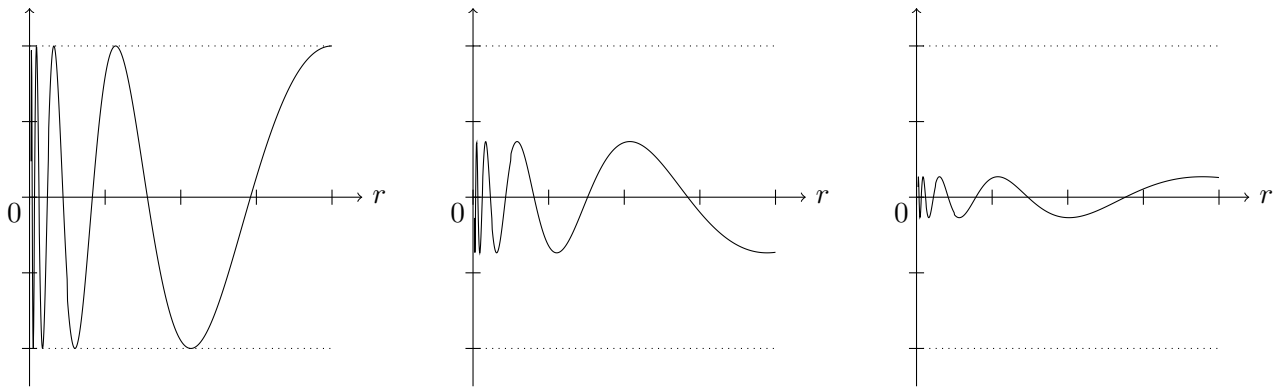


FIGURE 4.9 – Exemple de comportement au cours du temps de la partie radiale de  $e^{i(\beta z - \eta \ln r - \omega t)} \Phi(\theta)$ , pour  $\eta > 0$ ,  $\Im m(\omega) < 0$  au voisinage du coin à différents instants ( $t = 0$  à gauche).

**Remarque 4.10.** Si l'on avait choisi d'étendre l'opérateur en prenant en compte  $s^{\text{in}}$ , en reprenant le bilan d'énergie (4.23) alors les valeurs propres complexes sont telles que  $\Im m(\omega^2) > 0$ . Les modes associés seraient alors croissants en temps !

Maintenant que nous avons caractérisé le spectre, intéressons-nous aux questions d'approximation.

### 4.5 Approximation des valeurs propres pour un contraste dans l'intervalle critique

Lorsque  $\kappa_\varepsilon \in I_c \setminus \{-1\}$ , comme l'opérateur n'est ni auto-adjoint ni à résolvante compacte à cause des ondes de trou noir (très oscillantes aux coins), on comprend pourquoi les méthodes éléments finis classiques échouent pour approcher les modes. Effectuons quelques expériences numériques pour s'en convaincre.

Nous reprenons la même configuration que celle de la section 4.2.4 : nous souhaitons calculer numériquement les modes de (4.10) dans un guide d'ondes plasmonique avec une section circulaire, et une inclusion métallique de section triangulaire (voir Figure 4.6), pour un contraste  $\kappa_\varepsilon \in I_c \setminus \{-1\}$ . On considère un triangle isocèle d'angle au sommet  $\phi_1 = \pi/6$ , et pour la base  $\phi_2 = \phi_3 = 5\pi/12$ . Dans ce cas  $b_\Sigma = (2\pi - \phi_1)/\phi_1 = 11$ , et l'intervalle critique vaut  $I_c = [-11; -1/11]$ . Nous utilisons le même code MATLAB que dans la section 4.2.4. Nous considérons des éléments finis de Lagrange d'ordre 2. Nous avons calculé les cinquante premières valeurs propres sur deux maillages différents pour  $\beta = 1$  et  $\kappa_\varepsilon = -10/9 \in [-11; -1[$  (voir Figure 4.10).

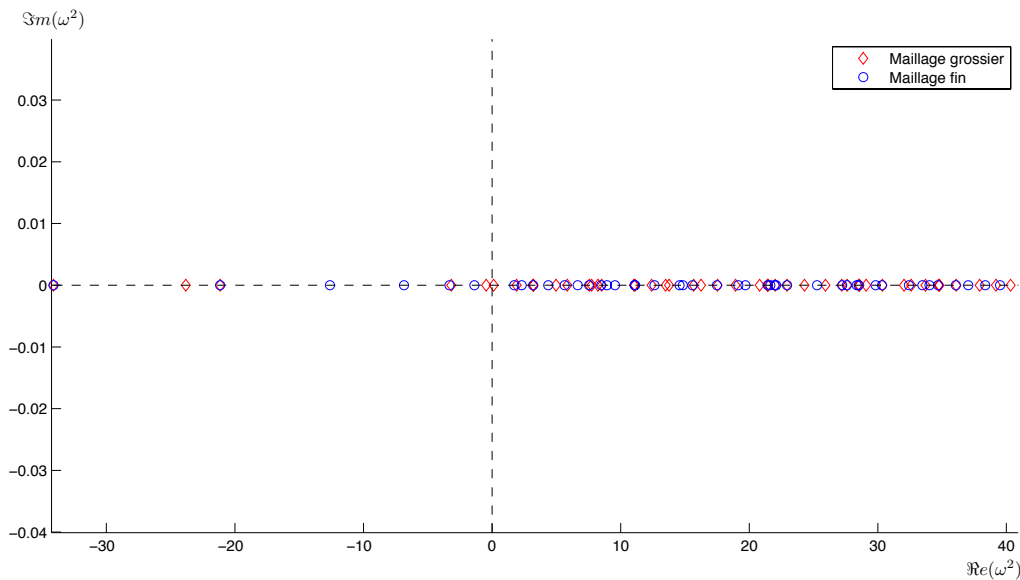


FIGURE 4.10 – Représentation des 50 premières valeurs propres obtenues pour  $\kappa_\varepsilon = -10/9$  et  $\beta = 1$ , sur deux maillages différents. Lorsque l'on raffine le maillage, le spectre n'est pas stable et se densifie.

La première chose à remarquer est que nous obtenons un spectre réel discret alors que nous savons que  $\sigma(A(\beta)) = \mathbb{C}$ . Ceci est dû à la discrétisation. En effet, le problème de valeurs propres approché numériquement est un problème en dimension finie, le spectre obtenu sera donc toujours discret (et plus on raffine le maillage, plus le spectre se densifie). Le fait que le spectre soit réel est simplement dû au fait que les matrices éléments finis utilisées sont des matrices symétriques définies positives. Ensuite, on remarque que lorsque l'on raffine le maillage, le spectre n'est pas stable. Par exemple, la première valeur propre négative (la plus petite en module) n'est pas stable, d'autre part le mode associé est complètement différent (voir Figure 4.11). Sur la Figure 4.11 on observe que les modes sont des modes d'interface, très singuliers aux coins. Ceci est dû aux ondes de trou noir.

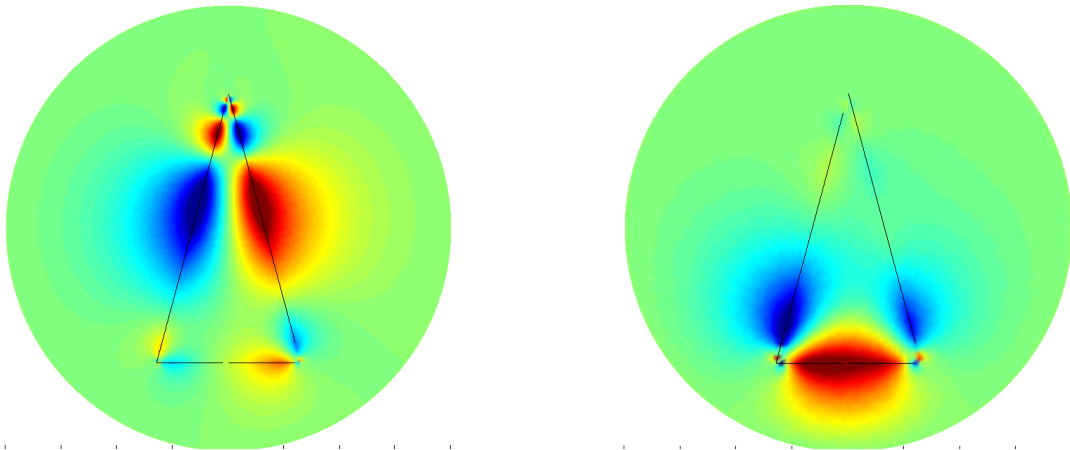


FIGURE 4.11 – Représentation du mode associé à la première valeur propre négative pour deux maillages différents : maillage grossier à gauche, maillage fin à droite.

Cependant on peut remarquer que certaines valeurs propres restent stables vis-à-vis du maillage (par exemple la deuxième plus petite (en module) valeur propre négative, ou la troisième plus petite valeur propres positive sur la Figure 4.10). Si l'on représente les modes associés pour les deux maillages, même dans ce cas les modes ne sont pas stables. Nous en donnons un exemple pour la septième plus petite valeur propre positive (voir Figure 4.12).

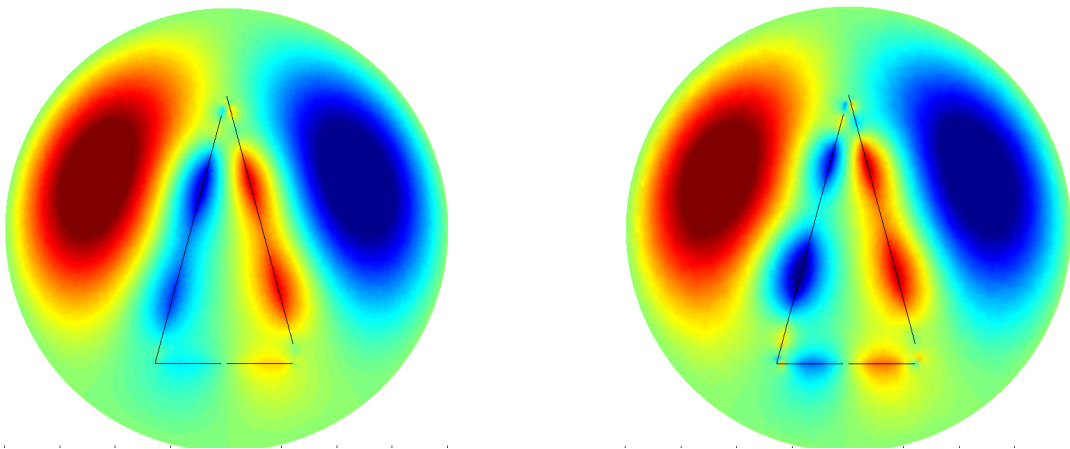


FIGURE 4.12 – Représentation du mode associé à la septième valeur propre positive pour deux maillages différents : maillage grossier à gauche, maillage fin à droite.

D'après le chapitre précédent, même en raffinant aux voisinage des coins, la solution approchée ne sera pas stable et des réflexions parasites apparaîtront. Comment procéder ? Nous savons que pour l'opérateur étendu, les modes se décomposent de la forme  $u = b\chi_\rho s^{\text{out}} + u_A$ ,  $b \in \mathbb{C}$ ,  $u_A \in D(A)$ , et que les valeurs propres réelles sont celles de  $A(\beta)$ . Il nous faut donc capturer  $s^{\text{out}}$  aux coins : nous allons utiliser des PMLs (Perfectly Matched Layers) aux coins.

### 4.5.1 Formulation du problème de valeurs propres sur le domaine découpé

Nous utilisons exactement la même démarche (et les mêmes notations) que celle présentée dans la section 3.4. L'idée est d'écrire le problème de valeurs propres sur le domaine perforé  $\Omega \setminus \overline{D_\rho}$ , et au voisinage du coin  $D_\rho$  utiliser le changement de variables  $(r, \theta) \rightarrow (\zeta := \ln r, \theta)$  pour se ramener à un guide d'ondes (avec des conditions périodiques)  $S_\rho$ . Si l'on note  $\check{u}$  la solution dans  $S_\rho$ , la paire  $(\check{u}, \omega^2)$  satisfait

$$-\varepsilon^{-1} \partial_\zeta^2 \check{u} - \partial_\theta(\varepsilon^{-1} \partial_\theta \check{u}) + \beta^2 \varepsilon^{-1} e^{2\zeta} \check{u} = \omega^2 e^{2\zeta} \mu \check{u}, \quad \text{dans } S_\rho = ]-\infty, \ln \rho[ \times ]\pi; \pi[.$$

On rappelle qu'à l'infini dans le guide –c'est-à-dire au voisinage du coin– le terme  $(\beta^2 \varepsilon^{-1} - \omega^2 \mu) \check{u} e^{2\zeta}$  devient négligeable quand  $\zeta \rightarrow -\infty$  et le comportement des modes est donné par les solutions  $\check{s}$  telles que  $\operatorname{div}(\varepsilon^{-1} \nabla \check{s}) = 0$  dans  $S_\rho$ . Ce qui fait la particularité des problèmes en plasmonique étudiés dans cette thèse, c'est que le comportement singulier des solutions aux coins ne dépend pas de la valeur propre  $\omega^2$  ! C'est en étudiant l'opérateur étendu que l'on retrouve une dépendance entre la valeur propre  $\omega^2$  et les modes qui excitent la singularité (voir lemme 4.3).

Dans la nouvelle géométrie, on comprend aussi pourquoi l'approximation par éléments finis ne convergeait pas : si le maillage n'est pas adapté aux coins, cela revient à tronquer  $S_\rho$ . Sans traitement spécifique, les modes sont donc réfléchis à la frontière de la bande tronquée, perturbant la solution globale.

Comme dans la section 3.4, on utilise une PML pour tronquer  $S_\rho$ , dont le coefficient  $\alpha$  doit être ajusté de la même façon : pour que la fonction  $z \mapsto e^{2\zeta/\alpha}$  soit décroissante vers  $-\infty$ , on choisit  $\alpha$  tel que  $\Re(\alpha) > 0$ , et tel que  $\check{s}^{\text{out}}(\zeta/\alpha, \theta)$  devienne exponentiellement décroissant vers  $-\infty$  (voir section 3.4.2). Grâce à cette méthode nous pouvons tronquer  $S_\rho$  et utiliser une méthode éléments finis pour approcher la solution. En pratique nous allons chercher la paire  $(u, \omega^2)$  solution du système suivant :

$$\left| \begin{array}{ll} -\mu^{-1} (\operatorname{div}(\varepsilon^{-1} \nabla u) - \beta^2 \varepsilon^{-1} u) = \omega^2 u & \text{dans } \Omega \setminus \overline{D_\rho} \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ -\mu^{-1} (\varepsilon^{-1} \alpha \partial_\zeta^2 + \alpha^{-1} \partial_\theta \varepsilon^{-1} \partial_\theta) u + (\varepsilon \mu \alpha)^{-1} \beta^2 e^{2\zeta/\alpha} u = \omega^2 \alpha^{-1} e^{2\zeta/\alpha} u & \text{dans } S_\rho^L \\ \partial_\zeta u(\ln L, \cdot) = 0 \\ u(\rho, \cdot) = u(\ln \rho, \cdot), \quad \rho \partial_r u(\rho, \cdot) = \partial_\zeta u(\ln \rho, \cdot). \end{array} \right. \quad (4.24)$$

Ci-dessus  $S_\rho^L := (\ln \rho - L, \ln \rho) \times ]-\pi; \pi[$  désigne la bande tronquée,  $L > 0$  étant choisi comme au chapitre précédent. Encore une fois, il est important d'imposer une condition de Neumann à la fin de la PML pour éviter la réflexion du mode constant. La formulation variationnelle associée à (4.24) s'écrit :

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } (u, \check{u}, \omega^2) \in H^1(\Omega \setminus \overline{D_\rho}) \times H_{\text{per}}^1(S_\rho^L) \setminus \{(0, 0)\} \times \mathbb{C} \text{ tels que :} \\ a(\beta; u, v) + \check{a}(\beta; \alpha; \check{u}, \check{v}) = \omega^2 (b(u, v) + \check{b}(\alpha; \check{u}, \check{v})), \quad \forall (v, \check{v}) \in H^1(\Omega \setminus \overline{D_\rho}) \times H_{\text{per}}^1(S_\rho^L) \\ \text{avec } a(\beta; u, v) = \int_{\Omega \setminus \overline{D_\rho}} \varepsilon^{-1} (\nabla u \cdot \overline{\nabla v} + \beta^2 u \overline{v}) \, d\mathbf{x}, \\ \check{a}(\beta; \alpha; \check{u}, \check{v}) = \int_{S_\rho^L} \varepsilon^{-1} (\alpha \partial_\zeta \check{u} \cdot \overline{\partial_\zeta \check{v}} + \alpha^{-1} \partial_\theta \check{u} \cdot \overline{\partial_\theta \check{v}} + \beta^2 \alpha^{-1} e^{2\zeta/\alpha} \check{u} \overline{\check{v}}) \, d\mathbf{x}, \\ b(u, v) = \int_{\Omega \setminus \overline{D_\rho}} \mu u \overline{v} \, d\mathbf{x}, \quad \check{b}(\alpha; \check{u}, \check{v}) = \int_{S_\rho^L} \mu \alpha^{-1} e^{2\zeta/\alpha} \check{u} \overline{\check{v}} \, d\mathbf{x}. \end{array} \right. \quad (4.25)$$

Nous renvoyons au chapitre 3 pour les détails de discrétisation. Comme précédemment, on considère deux familles de triangulations  $(\mathcal{T}_h, \check{\mathcal{T}}_h)_h$ , un espace d'approximation de  $H^1(\Omega \setminus \overline{D_\rho}) \times H_{\text{per}}^1(S_\rho^L)$

conforme, et le problème (4.25) sous forme discrète peut se réécrire comme la résolution du système matriciel

$$\mathbb{A}U = \omega^2 \mathbb{B}U,$$

avec  $\mathbb{A}$  et  $\mathbb{B}$  les matrices éléments finis associées à  $a(\beta; \cdot, \cdot) + \check{a}(\beta; \alpha; \cdot, \cdot)$  et  $b(\cdot, \cdot) + \check{b}(\alpha; \cdot, \cdot)$ .

**Remarque 4.11.** Si l'interface  $\Sigma$  présente  $N$  coins  $(\mathbf{c}_i)_{i=1,N}$ , il suffit de réécrire (4.24) sur le domaine perforé  $\Omega \setminus \cup_{i=1}^N \overline{D_{\rho_i}}$ , puis de placer une PML à chaque coin  $\mathbf{c}_i$ , de coefficient  $\alpha_i$ ,  $i = 1, N$ . Pour la résolution numérique, les matrices  $\mathbb{A}$ ,  $\mathbb{B}$  sont les matrices éléments finis associées aux formes  $a(\beta; \cdot, \cdot) + \sum_{i=1}^N \check{a}(\beta; \alpha_i; \cdot, \cdot)$  et  $b(\cdot, \cdot) + \sum_{i=1}^N \check{b}(\alpha_i; \cdot, \cdot)$ .

### 4.5.2 Illustrations numériques

Comme précédemment approchons les valeurs propres du même guide d'ondes de section circulaire avec une inclusion métallique à base triangulaire pour un contraste dans l'intervalle critique, en plaçant des PMLs aux coins. En utilisant le code MATLAB avec PMLs implémenté pour le problème de diffraction, nous avons calculé les cinquante premières valeurs propres de (4.25) pour  $\kappa_\varepsilon = -10/7$  et  $\beta = 1$  pour deux maillages différents (voir Figure 4.13). Nous constatons que nous obtenons un spectre complexe, et les valeurs propres sont bien de partie imaginaire négative. De plus, les valeurs propres sont stables lorsque l'on raffine le maillage. Les quelques petits décalages observés d'une part ne concernent pas les valeurs propres réelles (qui rappelons-le constituent le spectre de  $A(\beta)$ ), d'autre part sont liés au coefficient de la PML potentiellement mal ajusté pour les valeurs propres de grande partie réelle.

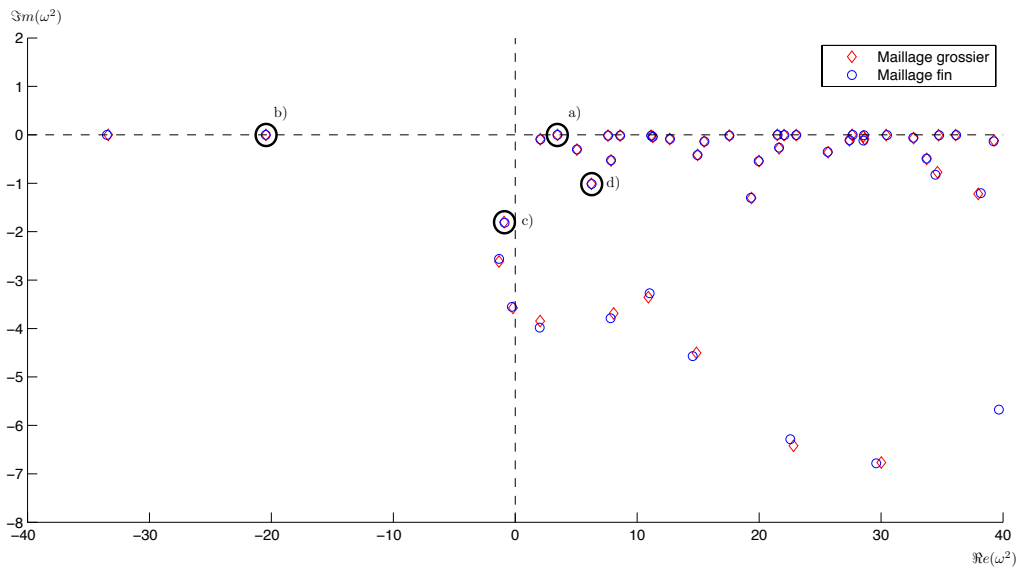


FIGURE 4.13 – Représentation des 50 premières valeurs propres obtenues pour  $\kappa_\varepsilon = -10/7$  et  $\beta = 1$  sur deux maillages différents. Lorsque l'on raffine le maillage, les valeurs propres réelles sont maintenant stables. Les configurations a), b), c), d) sont représentées dans la Figure 4.14. Les valeurs propres complexes sont relativement stables vis-à-vis du pas de maillage, les décalages observés sont liés au coefficient de la PML (fixé une fois pour toute). Pour les valeurs propres de grande partie réelle, il se peut que le paramètre ne soit pas bien ajusté.



Dans la Figure 4.14, nous avons tracé quelques modes associés, les disques blancs représentent les zones où nous utilisons les PMLs. On remarque que les modes associés à des valeurs propres complexes sont surtout des modes d'interface tandis que ceux associés aux valeurs propres réelles gardent la caractéristique précisée dans la section 4.2.4, à savoir être confiné dans le métal pour les valeurs propres négatives, et vice versa. De plus les modes sont stables lorsque l'on raffine le maillage.

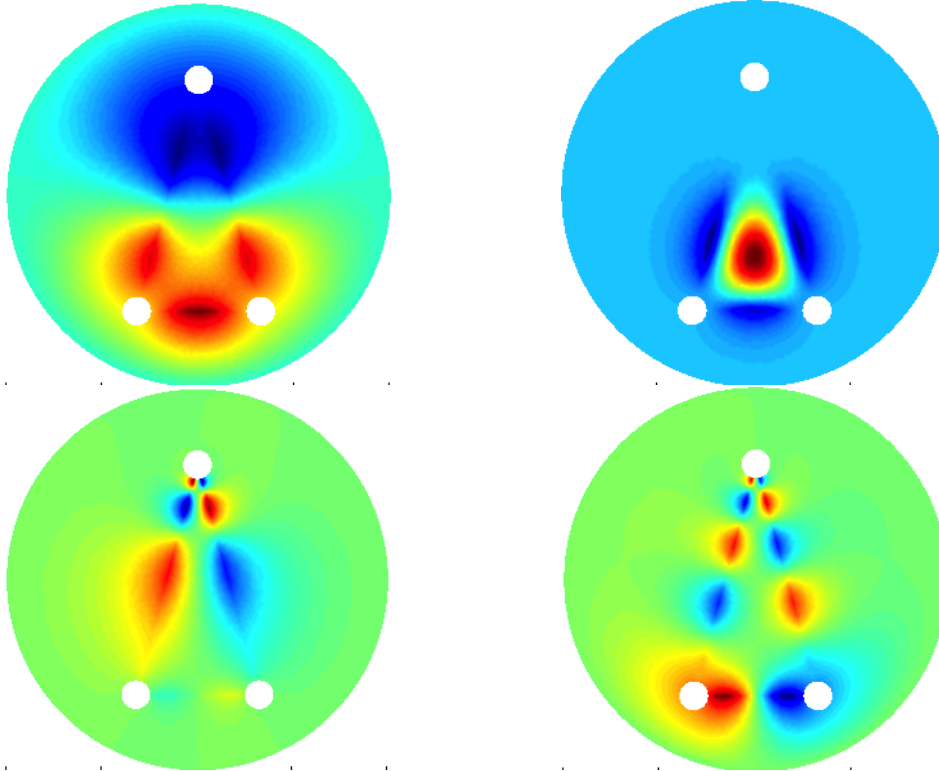


FIGURE 4.14 – De gauche à droite, de haut en bas : représentation des modes associés aux valeurs propres a), b), c), d) de la Figure 4.13.

### 4.5.3 Conservation de l'énergie

Supposons que l'interface  $\Sigma$  possède  $N$  coins notés  $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_N$ . Le lemme 4.3 nous permet d'affirmer que l'énergie absorbée par les coins est égale à l'énergie dissipée dans la cavité :

$$\sum_{i=1}^N \mathcal{E}_{\mathbf{c}_i} = \mathcal{E}_\Omega, \quad \text{avec } \mathcal{E}_{\mathbf{c}_i} := |b_i|^2 \left| \lambda_i^{\text{out}} \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon^{-1} \Phi_i(\theta)^2 d\theta \right|, \quad \mathcal{E}_\Omega := |\Im m(\omega^2)| \|u\|_{\Omega, \mu}^2.$$

Nous pouvons donc quantifier à chaque coin l'énergie capturée par les ondes de trou noir. Par exemple nous pouvons conclure que pour les modes de la Figure 4.14, en notant  $\mathbf{c}_1$  le coin avec l'angle le plus aigu (dans  $\Omega_m$ ) : pour les configurations a) et b) on vérifie que  $\mathcal{E}_{\mathbf{c}_1} = \mathcal{E}_{\mathbf{c}_2} = \mathcal{E}_{\mathbf{c}_3} = 0$ , pour les configurations c) et d) on trouve que l'énergie est majoritairement dissipée dans le coin  $\mathbf{c}_1$ . Il peut évidemment y avoir d'autres configurations comme le montre la Figure 4.13. On peut remarquer que la somme des flux d'énergie aux coins n'est pas tout à fait égale à celle dissipée dans la cavité : ceci est dû au fait que nous n'évaluons pas  $\mathcal{E}_{\mathbf{c}_i}$ ,  $i = 1, N$ , exactement au coin. Plus précisément l'erreur commise vient de l'évaluation du coefficient de singularité  $b_i$  (voir section 3.4.4). Comme  $\rho \neq 0$ , de par la présence

de la PML, les autres termes volumiques ont aussi une partie imaginaire non nulle et contribuent à la conservation d'énergie. Cependant, on remarque que la contribution est faible.

**Remarque 4.12.** Grâce à l'étude des singularités effectuées dans la section 3.3, nous savons que pour chaque coin :

★ si  $\kappa_\varepsilon \in [-b_\Sigma; -1[$  la singularité est antisymétrique par rapport à la bissectrice au coin.

★ si  $\kappa_\varepsilon \in ]-1; -1/b_\Sigma]$  la singularité est symétrique par rapport à la bissectrice au coin.

Ainsi, il est moral dans les configurations a) et b) de la figure 4.14 qu'aucune énergie ne soit dissipée aux coins puisque les solutions  $y$  sont symétriques localement, tandis que pour c) et d) seul la singularité du coin  $\mathbf{c}_1$  est excitée.

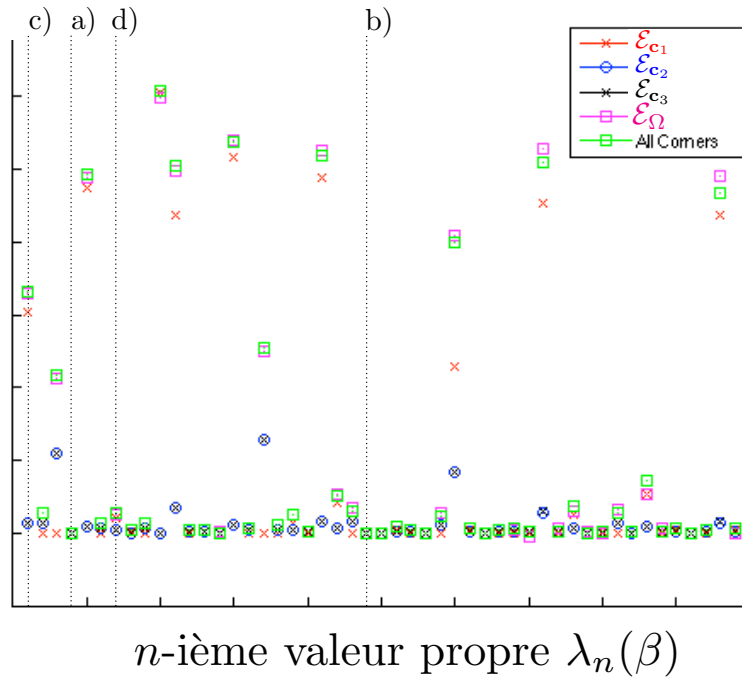


FIGURE 4.15 – Énergie absorbée par chaque coin et comparaison avec l'énergie dissipée dans la section perforée. Pour les configurations a), b) il n'y a pas d'énergie absorbée par les coins, pour les configurations c), d) le coin le plus aigu absorbe le plus d'énergie.

L'utilisation des PMLs permet d'approcher de façon stable les valeurs propres de  $A(\beta)$  pour un contraste  $\kappa_\varepsilon \in I_c \setminus \{-1\}$ . Cette méthode trie les valeurs propres dans le plan complexe, les valeurs propres réelles étant associées aux modes guidés que l'on cherche, et les valeurs propres complexes étant associées aux modes *de trou noir*. Pour mieux comprendre leur rôle et l'effet de la PML sur ces modes de trou noir, il est plus intéressant de reformuler le problème spectral dans la géométrie non bornée, c'est-à-dire  $S_\rho$ . Nous faisons le choix d'évoquer ce problème en fin de chapitre dans la section 4.7.2.

## 4.6 Retour au problème non linéaire

Il est temps de se rappeler que la permittivité du métal (non absorbant)  $\varepsilon_m$  est en fait une fonction de la fréquence  $\omega$  (voir (1.7)). Dans tout ce qui précède, nous avons fixé la fréquence  $\omega$  (donc  $\varepsilon_m$ ), et

nous avons calculé les valeurs propres  $(\lambda_n(\beta, \omega))_n$  de  $A(\beta; \omega)$  (pour  $\omega$  fixé). Pour trouver les valeurs propres du problème de départ (4.7), il suffit de résoudre l'équation de point fixe

$$\lambda_n(\beta, \omega) = \omega^2. \quad (4.26)$$

★ Lorsque  $\kappa_\varepsilon \notin I_c$ , nous avons obtenu une suite de valeurs propres positives et négatives qui tendent vers plus et moins l'infini. On peut déjà remarquer qu'il est impossible qu'une valeur propre négative soit solution de (4.26). En effet, pour  $\omega^2 < 0$  le modèle de Drude (1.7) nous donne que la permittivité est positive :

$$\varepsilon_m(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} > 0.$$

D'après les résultats rappelés dans la section 4.2.2, pour  $\varepsilon > 0$  l'opérateur  $A(\beta; \omega)$  est borné inférieurement : son spectre est alors constitué d'une suite de valeurs propres positives tendant vers  $+\infty$ , soit  $\lambda_n(\beta, \omega) > 0$ .

★ Lorsque  $\kappa_\varepsilon \in I_c \setminus \{-1\}$ , nous pouvons comme ci-dessus éliminer les valeurs propres négatives. Avec un raisonnement similaire, on montre que les valeurs propres complexes ne peuvent être solutions de l'équation de point fixe. En effet, pour  $\omega^2 \in \mathbb{C}^- := \{z \in \mathbb{C} / \Im m(z) < 0\}$ , alors

$$\varepsilon_m(\omega) = \varepsilon_m(1 - i \operatorname{signe}(\varepsilon_m) \gamma), \quad \varepsilon_m := 1 - \frac{\omega_p^2 \Re(\omega^2)}{|\omega^2|^2}, \quad \gamma := \frac{|\omega_p^2 \Im(\omega^2)|}{|\omega^2|^2 |\varepsilon_m|} > 0.$$

De par la présence du signe "-" dans l'expression ci-dessus, nous obtenons une permittivité complexe avec de l'anti-dissipation (ou de la dissipation pour la convention  $e^{i\omega t}$ ). Si l'on reprend tout le raisonnement de l'absorption limite dans ce cas (pour lequel on a le signe "+"), nous sommes en train de sélectionner  $s^{\text{in}}$ . En reprenant les résultats du lemme 4.2, nous trouvons alors que toutes les valeurs propres complexes sont telles que  $\Im m(\lambda_n(\omega, \beta)) > 0$ .

En pratique, pour un intervalle  $I_\omega$  de fréquences (réelles)  $\omega$ , on calcule l'intervalle de permittivités associé  $I_\varepsilon$  par (1.7) (voir section 1.3.4). On calcule ensuite les valeurs propres  $(\lambda_n(\beta, \omega))_n$  du problème pour  $\varepsilon_m \in I_\varepsilon$  (et  $\beta$  fixé). Enfin on regarde pour tout  $n$  si  $\lambda_n(\beta, \omega)$  appartient à l'intervalle de fréquences  $I_\omega$ . Comme dans [119, Chapitre 5] nous pouvons directement raisonner avec  $\varepsilon_m$  en cherchant l'intersection entre les fonctions

$$\varepsilon_m \mapsto \lambda_n(\beta, \varepsilon_m) \quad \text{et} \quad \varepsilon_m \mapsto \frac{\omega_p^2}{1 - \varepsilon_m}.$$

Dans [119] le problème de valeurs propres non linéaire traité est très similaire, posé dans un domaine non borné composé de trois matériaux. Nous reviendrons sur le problème spectral en domaine non borné en ouverture dans la section 4.7.2.

Nous voyons bien que cette méthode nécessite de résoudre à multiples reprises le problème en faisant varier  $\omega$  et en gardant en mémoire les  $\lambda_n(\beta, \omega)$ . Nous pouvons nous poser la question s'il n'est pas plus intéressant en termes de coût de calcul de nous ramener à un problème linéaire en étendant le système. Pour cela, il faut remarquer que la formulation variationnelle associées à (4.7) est un problème quadratique en  $\omega^2$ . En utilisant (1.7) dans (4.11) nous obtenons la formulation variationnelle suivante

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } (u, \omega^2) \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} \times \mathbb{C} \text{ tels que :} \\ \omega^4 \mathcal{M}_2(u, v) + \omega^2 \mathcal{M}_1(u, v) + \mathcal{M}_0(u, v) = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{array} \right. \quad (4.27)$$

avec  $\forall u, v \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_0(u, v) &= \int_{\Omega_d} \omega_p^2 \varepsilon_d^{-1} (\nabla u \cdot \overline{\nabla v} + \beta^2 u \bar{v}) d\sigma, \\ \mathcal{M}_1(u, v) &= \int_{\Omega} \tilde{\sigma} \nabla u \cdot \overline{\nabla v} + (\beta^2 \tilde{\sigma} - \omega_p^2 \mu) u \bar{v} d\sigma, \\ \mathcal{M}_2(u, v) &= \int_{\Omega} \mu u \bar{v} d\sigma, \\ \text{et } \tilde{\sigma} &= \begin{cases} -\varepsilon_d^{-1} & \text{dans } \Omega_d \\ -1 & \text{dans } \Omega_m \end{cases}.\end{aligned}$$

On considère une triangulation  $(\mathcal{T}_h)_h$  de  $\Omega$  et l'espace d'approximation de  $H_0^1(\Omega)$  :

$$V^h := \{v \in H_0^1(\Omega) : v|_{\tau} \in \mathbb{P}(\tau), \forall \tau \in \mathcal{T}_h\}.$$

Le problème (4.27) sous forme discrète peut se réécrire comme la résolution du système matriciel

$$(\omega^4 \mathbb{M}_2 + \omega^2 \mathbb{M}_1 + \mathbb{M}_0)U = 0, \quad (4.28)$$

où la matrice  $\mathbb{M}_i$ ,  $i = 0, 1, 2$ , est la matrice éléments finis associée à la discrétisation de  $\mathcal{M}_i(\cdot, \cdot)$ . Nous mentionnons que cette technique a été utilisée dans [128, Chapitre 3] pour résoudre des problèmes de valeurs propres non linéaires dans des réseaux métal-diélectrique.

En posant  $W = \omega^2 U$ , (4.28) se réécrit en un problème matriciel de valeurs propres linéaire :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{M}_0 & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ W \end{pmatrix} = \omega^2 \begin{pmatrix} -\mathbb{M}_1 & -\mathbb{M}_2 \\ \mathbb{I} & \mathbb{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ W \end{pmatrix}. \quad (4.29)$$

Nous indiquons c'est une méthode numérique classique pour résoudre les problèmes de valeurs propres quadratiques. Pour les équations de Maxwell, il est possible de passer par une formulation augmentée en utilisant des champs auxiliaires : les travaux [59, 32] portent notamment sur les problèmes de valeurs propres non linéaires dans des structures périodiques métal-diélectrique, pour le modèle de Drude-Lorentz avec ou sans dissipation. Le système à résoudre est maintenant deux fois plus grand mais la résolution du point fixe est incluse dans le système. Étant donnée la taille relativement petite des problèmes que nous résolvons et de par le caractère creux des matrices éléments finis, il est plus avantageux d'utiliser la deuxième méthode [97].

Il faut remarquer que pour le système matriciel considéré (4.29), les deux matrices sont singulières (c'est-à-dire non inversibles). En effet, la forme bilinéaire  $\mathcal{M}_0$  n'est défini que sur  $\Omega_d$ . On remarque alors que toute paire  $(u, 0)$ , avec  $u \in H_0^1(\Omega)$  tel que  $u|_{\Omega_d} = 0$  est solution de (4.27), donc 0 est point d'accumulation des valeurs propres puisque de multiplicité infinie.

**Remarque 4.13.** *Plus précisément, les solutions associées à  $\omega^2 = 0$  sont les solutions  $u \in H_0^1(\Omega)$  telles que*

$$\int_{\Omega_d} \nabla u \cdot \overline{\nabla v} d\mathbf{x} = -\beta^2 \int_{\Omega_d} u \bar{v} d\mathbf{x}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

*Or les valeurs propres de l'opérateur  $-\Delta$  sont positives donc seul  $u = 0$  (sur  $\Omega_d$ ) est solution possible.*

Avec un raisonnement similaire, on constate que  $(u, \omega_p^2)$  avec  $u \in H_0^1(\Omega)$  tel que  $u|_{\Omega_m} = 0$  est solution de (4.27), donc  $\omega_p^2$  est aussi point d'accumulation. Il faut remarquer aussi que ces deux valeurs  $\{0, \omega_p^2\}$  sont deux valeurs dégénérées de (1.7), pour lesquelles  $\varepsilon = 0$  ou  $\varepsilon = -\infty$ . À première vue, il n'y

a pas d'autre solution évidente et les quelques tests numériques effectués avec les deux méthodes n'ont pas montré d'autres possibilités.

Nous nous arrêtons-là sur l'étude de la non linéarité, mais il reste encore plein de choses à explorer, notamment la sensibilité au modèle de non linéarité considéré. Par exemple, dans [119], on y considère un guide avec une ligne supraconductrice. C'est un guide non borné composé de trois milieux, dont l'un possède une permittivité modélisée avec le modèle de London, c'est-à-dire que  $\varepsilon$  est de la forme

$$\varepsilon(\omega) = -\frac{1}{C\omega^2}, \quad C > 0.$$

Dans ce cas l'équation de point fixe est plus simple, le problème est quadratique non pas en  $\omega^2$  mais en  $\omega$ , et l'on peut trouver un point fixe. En rajoutant simplement une constante à cette permittivité (ce qui donne approximativement le modèle de Drude), on change complètement la nature du problème. Les modèles de permittivité considérés par [128, 59, 32] étant encore différents, il est encore une fois normal de ne pas trouver de résultats similaires.

## 4.7 Conclusion et perspectives

Pour étudier les modes d'un guide d'ondes plasmonique scalaire de section bornée, nous avons vu qu'il fallait résoudre un problème de valeurs propres non linéaire. D'un point de vue théorique, une technique efficace consiste à linéariser le problème puis de résoudre un problème de point fixe. Pour le problème de valeurs propres linéaire, comme  $\varepsilon$  change de signe il faut adopter deux démarches différentes selon la valeur du contraste  $\kappa_\varepsilon$ . Hors intervalle critique, l'opérateur est auto-adjoint et à résolvante compacte, son spectre est composé de valeurs réelles positives et négatives tendant vers  $\pm\infty$ . De par le caractère compact nous pouvons approcher les valeurs propres de l'opérateur avec des méthodes éléments finis standards et tout en évitant la pollution spectrale. Cependant, il est important d'utiliser des maillages localement T-conformes pour garantir des vitesses de convergence optimales. Lorsque le contraste est choisi dans l'intervalle critique, il faut étendre l'opérateur en prenant en compte les singularités sortantes aux coins : à partir de là nous pouvons trier les valeurs propres dans le plan complexe. Une manière de procéder numériquement est de placer des PMLs aux coins : les modes guidés sont alors situés sur l'axe réel, les valeurs propres complexes excitant les ondes de trou noir. Nous terminerons par quelques commentaires :

- ★ Si le guide est composé d'un diélectrique et d'un métamatériau ( $\mu < 0$  et  $\varepsilon < 0$ ), les choses se compliquent grandement. En effet nous perdons le produit scalaire pondéré par  $\mu$  et nous retombons sur les mêmes difficultés que le problème (4.6). De plus, comme pour le problème 1D (3.20), le spectre peut contenir des valeurs propres complexes même pour un contraste hors intervalle critique.
- ★ Comme pour le problème de diffraction, nous ne savons pas à l'heure actuelle montrer que la méthode numérique avec l'utilisation de PMLs converge. La raison principale est toujours que nous ne savons pas montrer que le problème avec PMLs est bien posé. Comme  $\varepsilon$  change de signe, nous avons recours à la T-coercivité mais à l'heure où nous écrivons ce manuscrit nous n'avons pas trouvé de candidat T satisfaisant. Il y a la possibilité de travailler dans les espaces à poids dans la bande, et s'inspirer de [80] pour estimer l'erreur commise en tronquant la PML. D'autres techniques numériques comme les espaces infinis de Hardy ont aussi été proposées par [75].
- ★ La nature des modes associés aux valeurs propres complexes est encore imprécise. Cette question mérite d'être travaillée plus en détails, et nous en discutons en ouverture dans la section suivante.
- ★ Comme expliqué dans le chapitre 1, le modèle de Drude sans dissipation fait partie des modèles les plus simples de permittivités mais n'est pas adapté à toutes les fréquences. On peut donc aussi étudier le même problème avec un matériau de Lorentz par exemple. Le problème de valeurs

propres non linéaire non auto-adjoint peut être aussi regardé plus en détails. Par exemple, cela concerne les guides d'ondes plasmoniques où l'on ne néglige pas la dissipation dans le métal. Ce travail fait notamment l'objet de la thèse de Yohan Brulé à l'Institut Fresnel.

- ★ Comme mentionné dans l'introduction, le problème considéré ici ne découle pas des équations de Maxwell. Cependant cette étude nous a donné un certain nombre d'outils pour comprendre comment aborder le problème vectoriel. Le chapitre suivant a pour but d'en donner quelques pistes.
- ★ Maintenant que le problème du guide fermé est bien compris, nous pouvons aussi nous poser la question du guide ouvert. Nous en donnons quelques éléments en ouverture dans la section suivante.
- ★ Nous mentionnons aussi les travaux [70, 42] sur les problèmes de valeurs propres en domaine borné avec changement de signe. Dans le premier  $\varepsilon_m$  joue le rôle de la valeur propre, dans le second on étudie le comportement des valeurs propres lorsque l'inclusion métallique devient de plus en plus petite.

#### 4.7.1 Des modes à fuite dans les coins ?

L'objectif de cette section est de donner des pistes pour interpréter les modes associés aux valeurs propres complexes précédentes. Pour cela, nous l'avons déjà mentionné dans le chapitre, il est intéressant de travailler dans la géométrie non bornée. Pour une écriture rigoureuse, il faudrait réécrire les opérateurs dans les espaces de Sobolev à poids dans le guide. Nous resterons très formels.

Pour l'étude, on suppose que  $\Omega$  ne possède qu'un seul coin  $\mathbf{c}$  d'angle  $\phi$ . Grâce au changement de variables  $(r, \theta) \rightarrow (\zeta = \ln r, \theta)$ , nous pouvons réinterpréter la géométrie comme suit :  $\Omega \setminus \overline{D_\rho}$  est transformée en un autre domaine borné (que l'on note  $\Omega_E$ ), tandis que  $D_\rho$  est transformé en une bande  $\mathcal{B}$  (voir Figure 4.16). Nous sommes alors en train de chercher les modes d'un guide ouvert puisque la section n'est plus bornée ! Attention cependant, on ne travaille pas avec un opérateur non borné de  $L^2(\mathcal{B})$ , il faudrait se placer dans l'espace de Sobolev à poids correspondant.

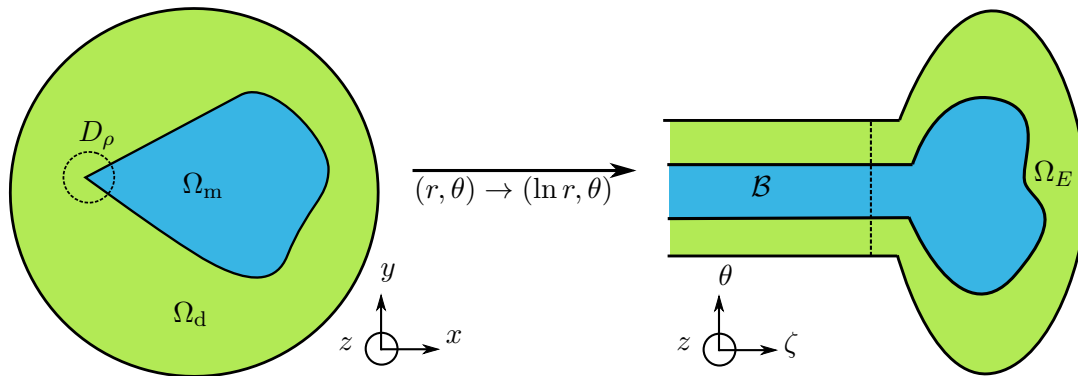


FIGURE 4.16 – Représentation schématique de la transformation de la section  $\Omega$  par le changement de variables  $(r, \theta) \rightarrow (\zeta = \ln r, \theta)$ . Avec ce changement de variables, nous sommes amenés à travailler dans un domaine non borné.

Les problèmes des guides ouverts *scalaires* (gouvernés par une équation de type Helmholtz) ont déjà fait l'objet de plusieurs études (quelques exemples [122, 119, 23, 66, 25, 128]). Dans cette géométrie que deviennent nos modes ? On y distingue des modes guidés et des modes de radiation. Pour

faire simple, comme dans [66] nous appelons mode guidé un mode localisé dans  $\Omega_E$  (soit évanescents dans  $\mathcal{B}$ ), et mode de radiation un mode qui sera propagatif dans  $\mathcal{B}$ . Les modes guidés sont liés aux valeurs propres de l'opérateur  $A(\beta)$ <sup>3</sup> tandis que les modes de radiation sont liés au spectre continu. Il existe une troisième catégorie de modes, les modes à fuite. Ces objets particuliers sont des modes (exponentiellement) croissants dans les directions transverses à celle de propagation. Pour les observer, il faut effectuer un prolongement analytique dans le plan complexe de l'opérateur. Pour cela il est classique d'utiliser les PMLs : cela permet d'une part d'effectuer un prolongement analytique simple rendant ces modes à fuite exponentiellement décroissants, d'autre part de borner le domaine pour les méthodes numériques. La PML a plusieurs effets : elle fait tourner dans le plan complexe le spectre continu, et elle révèle les modes à fuite à mesure que le spectre tourne.

Revenons à notre problème. Dans  $\mathcal{B}$ , nous avons vu que le comportement des modes était principalement décrit par les  $\check{s}(\zeta, \theta) = e^{\lambda\zeta}\Phi(\theta)$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$  solutions de  $\operatorname{div}(\varepsilon^{-1}\nabla\check{s}) = 0$  dans  $\mathcal{B}$ . Parmi ces modes<sup>4</sup>, nous avons distingué les modes évanescents ( $\Re(\lambda) > 0$ ), le mode constant et le mode propagatif sortant  $\check{s}^{\text{out}}$ . Nous avons aussi vu que les vecteurs propres de  $\mathfrak{A}(\beta)$  associés aux valeurs propres complexes comportaient une partie régulière  $u_A$  et une partie singulière liée à  $\check{s}^{\text{out}}$ . On peut se convaincre que les modes "singuliers" ou modes de trou noir ne sont pas des modes à fuites puisqu'ils ne sont pas exponentiellement croissants dans aucune direction. Sont-ils des modes de radiation ?

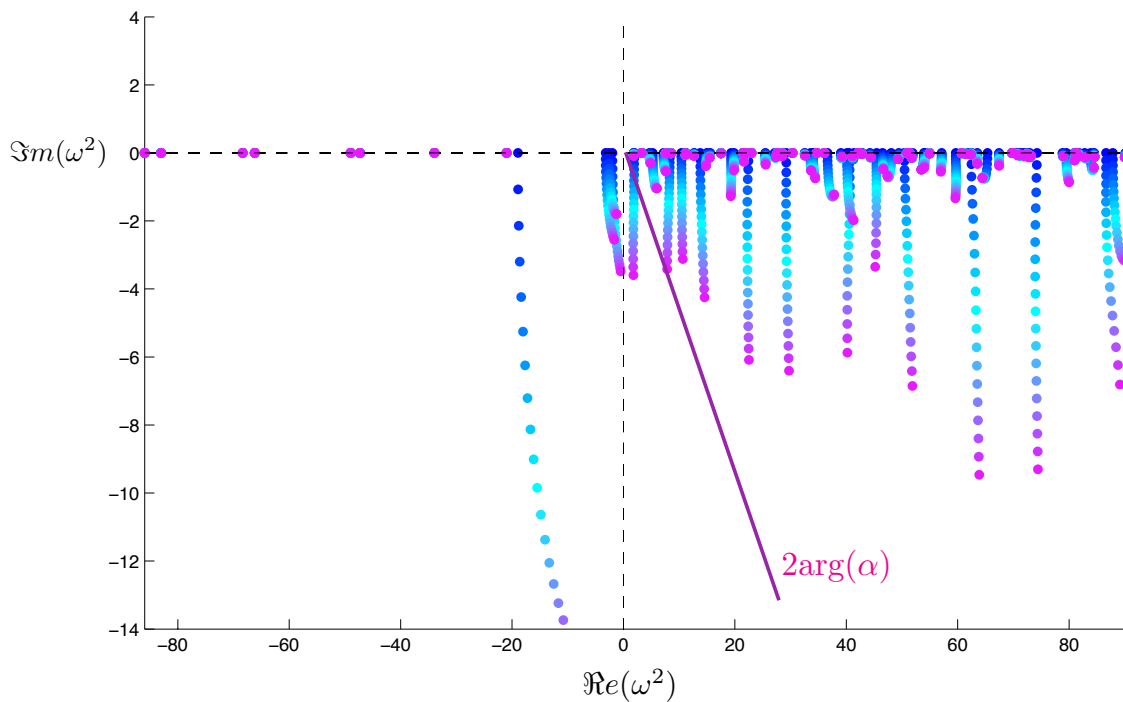


FIGURE 4.17 – Évolution du spectre en fonction du paramètre de la PML pour  $\kappa_{\varepsilon-} = -10/7$  et  $\beta = 1$ . Du bleu au violet :  $\alpha = e^{i\vartheta}$  avec  $\vartheta$  variant de 0 à  $-\pi/12$  (attention les échelles ne sont pas les mêmes pour les deux axes).

3. Nous faisons l'abus de notation  $A(\beta)$  pour désigner l'opérateur non borné dans la nouvelle géométrie.

4. La dénomination mode est peut-être mal choisie. Nous appelons tantôt modes les fonctions  $\check{s}$  lié à l'opérateur  $u \mapsto \operatorname{div}(\varepsilon^{-1}\nabla u)$  dans le guide, tantôt les vecteurs propres de  $\mathfrak{A}(\beta)$  sur tout le domaine.

Nous avons tracé sur la Figure 4.17 l'évolution du spectre obtenu pour  $\beta = 1$ ,  $\kappa_\varepsilon = -10/7$ , lorsque l'on fait varier le paramètre de PML. Le spectre est très dépendant de la valeur de la PML, pour autant la PML n'agit pas de façon homogène sur tout le spectre (le spectre ne tourne pas ici, il semble "pleuvoir"). Nous mentionnons qu'il existe des cas où le spectre continu forme des arcs à mesure que l'on augmente le coefficient de PML, comme par exemple dans les guides élastiques [72]. Dans ce cas on peut aussi utiliser une PML de paramètre  $\alpha(\lambda)$ , dont l'effet est ajusté pour faire tourner tout le spectre continu du même argument. Ici il ne semble pas y avoir ce phénomène, déterminer la nature exacte des valeurs complexes ne semble pas claire. Nous terminerons cette série de commentaires sur le spectre continu dans le cas du problème non linéaire.

**Remarque 4.14.** *La caractérisation du spectre continu passe par l'utilisation d'une suite singulière, ou suite de Weyl. Comme expliqué dans la section 4.7.2, il est facile d'en exhiber une lorsque le milieu est homogène à l'infini. Ici ce n'est plus le cas dans  $\mathcal{B}$ . La caractérisation du spectre passe forcément par les modes  $\check{s}$ , plus précisément par  $\check{s}^{\text{out}}$  et  $\check{s}^{\text{in}}$ .*

Souvenons-nous que  $\varepsilon$  dépend de  $\omega$ . Cela signifie que dans la bande  $\mathcal{B}$ , les modes sont principalement caractérisés par les solutions de  $\text{div}(\varepsilon^{-1}(\omega)\nabla u) = 0$ . En utilisant les singularités  $\check{s}^\pm(\zeta, \theta) = e^{\pm i\eta\zeta}\Phi(\theta)$ ,  $\eta > 0$ , nous devrions pouvoir construire des suites singulières caractérisant le spectre continu. L'avantage de travailler dans la géométrie non bornée est que la fonction de troncature utilisée pour régulariser la singularité est classique, contrairement au choix que l'on aurait pu faire précédemment (voir la remarque 4.6). Sauf que l'existence de telles solutions dépend de la valeur du contraste. Nous avons vu au chapitre 1 que l'intervalle critique  $I_c$  était lié à un intervalle critique de fréquences (voir section 1.3.4). Cela signifie que le spectre continu est en fait donné par cet intervalle de fréquences. L'inconvénient est qu'en général nous ne savons pas comment varie l'exposant  $\eta$  en fonction du contraste (donc de  $\omega$ ). Le seul cas où nous pouvons effectuer tous les calculs est le cas d'un angle droit ( $\phi = \pi/2$ ). Nous renvoyons à [38, Chapitres 3, 5] pour les détails du calcul. Connaissant dans ce cas particulier les solutions et leur dépendance à  $\omega$ , nous pouvons calculer comment le spectre continu évolue selon le paramètre de PML. Nous avons tracé sur la Figure 4.18 l'évolution de l'intervalle de fréquences critiques associé à  $] -b_\Sigma; -1[$ . L'effet de la PML semble similaire à celui mentionné pour les guides élastiques. Notons que nous obtenons la même chose pour les fréquences critiques associées à l'intervalle  $] -1; -1/b_\Sigma[$ . L'étude du guide plasmonique scalaire dissimule donc encore quelques secrets...

## 4.7.2 Le guide plasmonique ouvert

Nous avons déjà évoqué la question des problèmes spectraux dans des domaines non bornés dans la section 4.7.1. Nous souhaitons ici aborder brièvement le cas d'un guide d'ondes de section non borné (mais l'inclusion métallique est de section bornée). Dans ce cas l'opérateur possède du spectre essentiel, et de par le changement de signe de  $\varepsilon$  il n'est pas évident que les modes guidés existent. Contrairement à la section 4.7.1, nous nous concentrons sur la caractérisation du spectre lorsque  $\kappa_\varepsilon \notin I_c$ . Nous allons voir que la borne du spectre essentiel ne dépend pas du matériau qui constitue le cœur du guide : c'est un résultat connu lorsque les deux matériaux sont caractérisés par des constantes positives. Grâce à la T-coercivité nous retrouvons ce résultat.

Soit  $\Omega$  un ouvert **non borné** de  $\mathbb{R}^2$  tel que  $\Omega_m \subset \Omega$ , et l'on définit  $\Omega_d := \Omega \setminus \overline{\Omega_m}$ . Soit  $A(\beta) : D(A) \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  tel que  $A(\beta)u := -\mu^{-1}(\text{div}(\varepsilon^{-1}\nabla u) - \beta^2\varepsilon^{-1}u)$ , et

$$D(A) := \{u \in H^1(\Omega) / \mu^{-1} \text{div}(\varepsilon^{-1}\nabla u) \in L^2(\Omega)\}.$$

Ici nous allons souvent utiliser le produit scalaire classique sur  $L^2$  et celui pondéré par  $\mu$  selon la situation. En suivant le même raisonnement que pour montrer le théorème 4.2, on montre que  $A(\beta)$



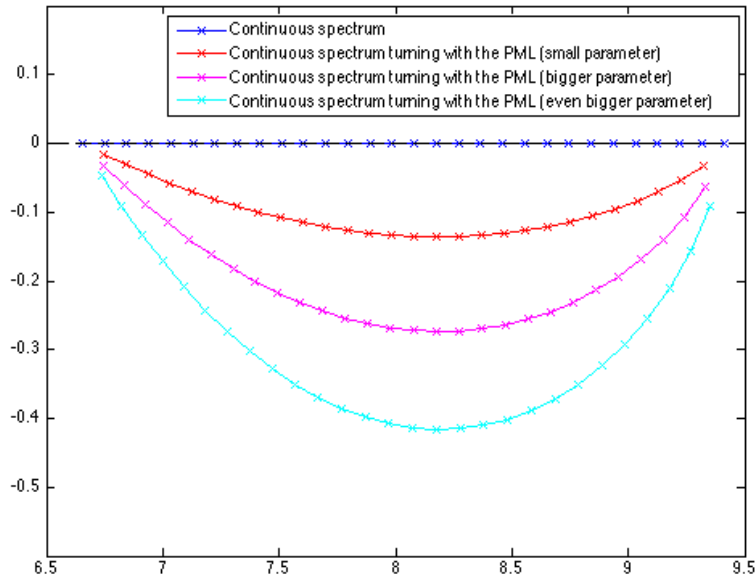


FIGURE 4.18 – Évolution du spectre continu en fonction du paramètre de la PML, dans le cas particulier où la géométrie présente un angle droit.

est auto-adjoint lorsque  $\kappa_\varepsilon \notin I_c$ . La seule différence ici est que la forme bilinéaire  $a(\beta; \cdot, \cdot)$  associée à  $A(\beta)$  vérifie l'inégalité de Gårding suivante [120] :

$$a(\beta; u, \mathbf{T}u) \geq \underline{\alpha} \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 - \underline{\beta} \|\mathbf{C}u\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \forall u \in H^1(\Omega),$$

avec  $\underline{\alpha}, \underline{\beta} > 0$  et  $\mathbf{C}$  est un opérateur à support compact (localisé au voisinage de l'interface). Commençons par caractériser le spectre essentiel de l'opérateur  $A(\beta)$ .

**Proposition 4.5.** *Soit  $\beta \in \mathbb{R}$ , et  $\kappa_\varepsilon \notin I_c$ . Alors le spectre essentiel de  $A(\beta)$  est*

$$\sigma_{ess}(A(\beta)) = [\beta^2 \varepsilon_d^{-1} \mu_d^{-1}; +\infty[.$$

**Preuve.** Nous allons procéder en deux temps : d'abord montrer que  $\sigma_{ess}(A(\beta)) \subset [\beta^2 \varepsilon_d^{-1} \mu_d^{-1}; +\infty[$  puis  $[\beta^2 \varepsilon_d^{-1} \mu_d^{-1}; +\infty[ \subset \sigma_{ess}(A(\beta))$ . La démarche à suivre est exactement la même que [66], la seule différence est le recours à la T-coercivité pour évaluer le signe de  $\int_{\Omega} \varepsilon^{-1} |\nabla u|^2 dx$ .

Soit  $\lambda \in \sigma_{ess}(A(\beta))$ . Soit une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in D(A)$  telle que  $\|u_n\|_{\Omega} = 1$ ,  $u_n \rightharpoonup 0$  faiblement dans  $L^2(\Omega)$  et  $\|A(\beta)u_n - \lambda u_n\|_{\Omega, \mu} \rightarrow 0$ . Nous allons procéder en deux étapes : d'abord nous allons montrer que  $(u_n)_n$  est bornée dans  $H^1(\Omega)$ , puis que  $\lambda \geq \beta^2 (\varepsilon_d \mu_d)^{-1}$ .

★ De la convergence forte nous en déduisons la convergence faible  $|((A(\beta) - \lambda I)u_n, u_n)_{\Omega, \mu}| \rightarrow 0$ . Soit  $\mathbf{T}$  un isomorphisme de  $H^1(\Omega)$  assurant la T-coercivité de la forme bilinéaire  $a(\beta; \cdot, \cdot)$ . Nous avons  $|((A(\beta) - \lambda I)u_n, \mathbf{T}u_n)_{\Omega, \mu}| \rightarrow 0$  puisque pour  $n$  assez grand nous avons

$$|((A(\beta) - \lambda I)u_n, \mathbf{T}u_n)_{\Omega, \mu}| \leq \|A(\beta)u_n - \lambda u_n\|_{\Omega, \mu} \|\mathbf{T}u_n\|_{\Omega, \mu} \leq C \|A(\beta)u_n - \lambda u_n\|_{\Omega, \mu},$$

où  $C$  désigne une constante générique pouvant changer d'une ligne à l'autre. Nous en déduisons pour  $n$  assez grand

$$\underline{\alpha} \|u_n\|_{H^1(\Omega)}^2 - \underline{\beta} \|\mathbf{C}u_n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq (A(\beta)u_n, \mathbf{T}u_n)_{\Omega, \mu} \leq C + \int_{\Omega} \lambda \mu u_n \overline{\mathbf{T}u_n} dx,$$

donc  $(u_n)_n$  est bornée dans  $H^1(\Omega)$ .

★ Remarquons que pour tout  $n$ ,  $\lambda(u_n, \mathbf{T}u_n)_{\Omega, \mu} = \lambda \|u_n\|_{\Omega, \mu}^2 + \lambda \int_{\Omega} \mu u_n \overline{(\mathbf{T} - I)u_n} d\mathbf{x}$ . On réécrit  $\lambda \|u_n\|_{\Omega, \mu}^2 = \lambda \mu_d + \lambda \int_{\Omega} (\mu - \mu_d) |u_n|^2 d\mathbf{x}$ . Comme  $u_n|_{\Omega_m}$  est bornée dans  $H^1(\Omega_m)$  et que  $u_n$  tend faiblement vers 0 dans  $L^2(\Omega_m)$ , on peut en extraire de  $u_n|_{\Omega_m}$  une sous-suite qui converge fortement vers 0 dans  $L^2(\Omega_m)$ . Comme  $u_n \rightharpoonup 0$  le terme  $\int_{\Omega} \mu u_n \overline{(\mathbf{T} - I)u_n} d\mathbf{x}$  tend vers 0 avec  $n$ , il vient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda(u_n, \mathbf{T}u_n)_{\Omega, \mu} = \lambda \mu_d.$$

Or

$$\begin{aligned} (A(\beta)u_n, \mathbf{T}u_n)_{\Omega, \mu} &= (\varepsilon^{-1} \nabla u_n, \nabla \mathbf{T}u_n)_{\Omega} + (\beta^2 \varepsilon^{-1} u_n, \mathbf{T}u_n)_{\Omega} \\ &\geq \underline{\alpha}' \|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)}^2 + (\beta^2 |\varepsilon|^{-1} u_n, u_n)_{\Omega} - \underline{\beta}' \|\mathcal{C}' u_n\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\geq -\underline{\beta}' \|\mathcal{C}' u_n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \beta^2 \varepsilon_d^{-1} + \beta^2 (|\varepsilon_m|^{-1} - \varepsilon_d^{-1}) (u_n, u_n)_{\Omega_m} \end{aligned}$$

Ci-dessus  $\underline{\alpha}' > 0$ ,  $\underline{\beta}' > 0$ , et  $\mathcal{C}'$  est un opérateur à support compact au voisinage de l'interface. En raisonnant comme précédemment, on montre que le premier et le dernier terme tendent fortement vers 0 dans  $L^2(K)$ , pour tout  $K \subset \Omega$  ouvert borné. Comme  $(A(\beta)u_n, \mathbf{T}u_n)_{\Omega, \mu} \rightarrow \lambda(u_n, \mathbf{T}u_n)_{\Omega, \mu}$ , on a alors

$$\lambda \geq \beta^2 \varepsilon_d^{-1} \mu_d^{-1}.$$

★ Il nous reste à montrer la réciproque. Il suffit de suivre exactement [66, Proposition 1.4]. Plus précisément, pour  $\lambda \in [-\beta^2 \varepsilon_d^{-1} \mu_d^{-1}; +\infty[$ , si  $\Omega$  n'est pas borné dans la direction  $x$  on construit une suite de Weyl de la forme suivante

$$u_n(x, y) = \frac{1}{n} e^{i\sqrt{-\beta^2 + \lambda \varepsilon_d \mu_d} x} \Phi\left(\frac{x}{n}, \frac{y}{n}\right)$$

avec  $\Phi \in \mathcal{D}(\Omega)$  à support dans  $\Omega_d$  telle que  $\|\Phi\|_{L^2(\Omega)} = 1$  (on inverse les rôles de  $x$  et  $y$  si  $\Omega$  est borné en  $x$ ). On montre facilement que  $(u_n)_n$  est une suite telle que pour tout  $n$ ,  $u_n \in D(A)$ ,  $\|u_n\|_{L^2(\Omega)} = 1$ ,  $u_n \rightharpoonup 0$  dans  $L^2(\Omega)$  et  $\|A(\beta)u_n - \lambda u_n\|_{\Omega, \mu} \rightarrow 0$ .  $\square$

Comme annoncé précédemment, la borne du spectre continu ne dépend pas du matériau dans le coeur  $\Omega_m$ . Comme pour l'unicité de la solution pour le problème de diffraction (voir le lemme 3.1), le lemme de Rellich nous permet de montrer la

**Proposition 4.6.** *Il n'y a pas de valeur propre incluse dans le spectre essentiel.*

Comme dans la section 4.2.2, on montre aussi que l'opérateur  $A(\beta)$  n'est pas borné inférieurement, il suffit de prendre une suite  $u_n$  à support restreint à  $\Omega_m$  telle que  $(A(\beta)u_n, u_n) \rightarrow -\infty$  (voir aussi [119, Proposition 5.6]). L'opérateur  $A(\beta)$  admet donc une suite de valeurs propres sous le spectre essentiel  $\left[\frac{\beta^2}{\varepsilon_d \mu_d}; +\infty\right]$  qui tend vers  $-\infty$ .

**Remarque 4.15.** *Notons que pour le guide ouvert de la section 4.7.1, le spectre essentiel est forcément différent puisque le milieu n'est pas homogène à l'infini. La construction utilisée ici ne fonctionne plus.*

Pour caractériser les valeurs propres sous le spectre essentiel, nous pouvons désormais utiliser une formule de Min-Max. Comme effectué dans la section 4.2, puisque  $A(\beta)$  n'est pas borné inférieurement, on travaille avec  $B_t := (A(\beta) - tI)^{-1}$ ,  $t \in \mathbb{R} \cap \rho(A(\beta))$ . Tout se déroule comme proposé dans [119, Chapitre 5]. Le critère d'existence de valeurs propres positives est plus délicat à cause du passage à l'inverse. Si l'on note  $\mathcal{N}(\beta)$  le nombre de valeurs propres strictement positives de  $A(\beta)$  inférieures à

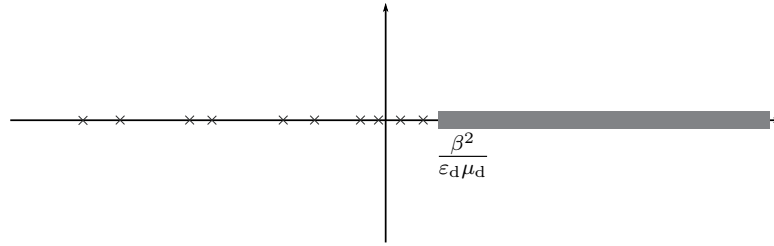


FIGURE 4.19 – Représentation du spectre de  $A(\beta)$  (la bande désigne le spectre continu, les croix désignent le spectre discret).

$\frac{\beta^2}{\varepsilon_d \mu_d}$ , alors montrer l'existence d'au moins une valeur propre positive ( $\mathcal{N}(\beta) \geq 1$ ) revient à exhiber un espace  $V_1 \subset \mathcal{V}_1(D(A))$  (sous-espace propre de  $D(A(\beta))$  de dimension 1) tel que

$$\forall u \in V_1, \frac{\beta^2}{\varepsilon_d \mu_d} (A(\beta)u, u)_{\Omega, \mu} > \|A(\beta)u\|_{\Omega, \mu}^2.$$

Pour cela il nous faut exhiber une suite  $(u_n)_n$  parcourant tout  $V_1$  vérifiant l'inégalité ci-dessus. La construction d'une telle suite n'est pas évidente. Dans [119], on utilise les propriétés d'un opérateur 1D (défini par exemple le long de l'axe  $O_y$ ). Dans le cas de la ligne supraconductrice, le critère trouvé pour exhiber une telle suite nécessite que le ruban de la ligne soit *suffisamment large*. Nous aimerions trouver un critère lié à la géométrie de notre inclusion (comme la T-coercivité). Si nous essayons d'adapter la démarche proposée dans [119], il faut alors étudier dans un premier temps l'opérateur 1D :

$$A^1(\beta) : D(A^1(\beta)) := \left\{ v \in H^1(\mathbb{R}), \frac{d}{dy} \left( \varepsilon^{-1} \frac{dv}{dy} \right) \in L^2(\mathbb{R}) \right\} \rightarrow L^2(\mathbb{R}).$$

L'étude des modes 1D est donc très similaire à l'étude des plasmons de surface effectuée au chapitre 1 dans le cas d'une interface plane. Ces solutions pourraient nous permettre de montrer l'existence de la première valeur propre de  $A^1(\beta)$  et l'on pourrait ensuite procéder comme dans [119]. La difficulté vient de la géométrie que l'on considère (la taille de  $\Omega_m$  peut ne pas être invariante selon  $y$ ). Une idée serait de "zoomer" au voisinage de l'interface, ce qui reviendrait à étudier une interface plane et localiser les plasmons avec des fonctions de troncature.



## CHAPITRE

# 5

# GUIDE D'ONDES PLASMONIQUE MAXWELL

## Sommaire

---

<b>Introduction</b> . . . . .	<b>137</b>
<b>5.1 Le guide plasmonique 2, 5D</b> . . . . .	<b>138</b>
5.1.1 Notations et position du problème . . . . .	138
5.1.2 Formulation du problème de valeurs propres magnétique . . . . .	141
5.1.3 Approche variationnelle . . . . .	143
<b>5.2 La T-coercivité pour Maxwell 2, 5D</b> . . . . .	<b>145</b>
5.2.1 La T-coercivité pour $a_z$ . . . . .	146
5.2.2 La T-coercivité pour $a_\perp$ . . . . .	147
5.2.3 Retour au cas Maxwell 2, 5D . . . . .	148
<b>5.3 Les modes guidés pour un contraste hors intervalle critique</b> . . . . .	<b>150</b>
5.3.1 Caractère auto-adjoint et résolvente compacte . . . . .	150
5.3.2 Caractérisation du spectre . . . . .	151
<b>5.4 Quelques remarques</b> . . . . .	<b>152</b>

---

## Introduction

Suite à l'étude du guide d'ondes plasmonique scalaire menée au chapitre précédent, nous continuons l'étude des modes guidés dans un guide d'ondes plasmonique, cette fois gouverné par les équations de Maxwell. L'étude mathématique et numérique des guides d'ondes en électromagnétisme est bien connue et a permis de comprendre la modélisation des guides optiques (fibres optiques ou microguides) [11, 7, 116, 79, 26]. Le problème ici est un problème spectral non standard à cause du changement de signe de  $\varepsilon$ , et les difficultés avaient déjà été mises en évidence dans la thèse de K. Ramdani [119, 27] pour l'analyse mathématique des lignes supraconductrices. Dans le cas des problèmes scalaires, nous avons vu au cours des chapitres précédents que la méthode de T-coercivité permettait de retrouver un cadre Fredholm, caractériser les modes, mais aussi justifier la convergence des méthodes numériques

éléments finis. Cette approche se base sur la construction explicite d'opérateurs dont l'action est localisée au voisinage de l'interface et qui "compensent" le changement de signe de  $\varepsilon$ . Pour les problèmes avec changement de signe en électromagnétisme, l'approche de T-coercivité a déjà été développée pour les équations de Maxwell 2D et 3D [20, 21, 39, 38, 16, 17]. Les principales différences avec les problèmes scalaires sont d'une part la construction des opérateurs non pas à partir de transformations géométriques mais à partir de la décomposition en potentiels des champs et la résolution de problèmes aux limites, et d'autre part –comme les espaces fonctionnels auxquels appartiennent les champs électromagnétiques peuvent dépendre de  $\varepsilon$ – la nécessité de démontrer de nouveaux résultats d'injection compacte.

Le but de ce chapitre est d'adapter la méthode de T-coercivité au cas du guide d'ondes gouverné par les équations de Maxwell, cas que nous appellerons 2,5D (problème 2D mettant en jeu les trois composantes du champ électromagnétique). De par le couplage entre les composantes des champs, il nous faut combiner les résultats de T-coercivité pour les problèmes scalaires pour la composante longitudinale et ceux pour les problèmes Maxwell 2D pour le champ transverse. À notre connaissance, les guides d'ondes plasmoniques n'ont pas été étudiés avec cette approche. Une fois le caractère bien posé (ou Fredholm) établi, nous pourrions aisément caractériser les modes.

Le plan du chapitre est le suivant. Dans un premier temps, nous posons les équations pour le problème des modes guidés magnétiques et électriques. Une fois le problème spectral présenté, la démarche est très similaire à celle du chapitre 4 : nous allons étudier dans un premier temps un problème de valeurs propres linéarisé et utiliser l'approche variationnelle. Après avoir rappelé les résultats de T-coercivité obtenus pour les problèmes scalaires et en Maxwell 2D, nous établissons le caractère auto-adjoint et à résolvante compacte de l'opérateur associé au problème de valeurs propres en combinant ces résultats. Nous allons voir que le caractère auto-adjoint est intimement lié à celui de l'opérateur associé au problème scalaire, vu au chapitre précédent. En conséquence, nous aurons encore deux cas à distinguer ( $\kappa_\varepsilon \notin I_c$  et  $\kappa_\varepsilon \in I_c$ ). Enfin nous reviendrons sur la caractérisation du spectre lorsque le caractère Fredholm dans les espaces classiques est établi. Dans tout ce chapitre nous nous concentrons sur le problème continu.

## 5.1 Le guide plasmonique 2,5D

### 5.1.1 Notations et position du problème

Comme au chapitre précédent, on considère  $D$  un ouvert de  $\mathbb{R}^3$  invariant dans une direction, par exemple la direction  $z$  :  $D := \{(x, y, z) \in \Omega \times \mathbb{R}\}$ , dont la section  $\Omega$  est bornée ( $D$  est entouré d'un conducteur parfait). On suppose par la suite que  $\Omega$  est un ouvert simplement connexe à frontière lipschitzienne. De plus  $D := \overline{D_d} \cup \overline{D_m}$ , où  $D_d := \Omega_d \times \mathbb{R}$  est un milieu homogène de permittivité  $\varepsilon_d > 0$  et perméabilité  $\mu_d > 0$ , et  $D_m := \Omega_m \times \mathbb{R}$  est une inclusion métallique de permittivité  $\varepsilon_m(\omega)$  et perméabilité  $\mu_m > 0$ . Dans toute la suite on considère un métal non absorbant, et l'on modélise la permittivité  $\varepsilon_m$  comme fonction de la fréquence  $\omega > 0$  avec le modèle de Drude simplifié (1.7) :

$$\varepsilon_m(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}.$$

On rappelle que  $\omega_p > 0$  est la fréquence plasma [58, 77], et l'on travaille dans la gamme de fréquences  $\omega < \omega_p$  : ainsi  $\varepsilon_m(\omega) < 0$ . On définit l'interface entre les deux matériaux par  $\Sigma \times \mathbb{R}$ , avec  $\Sigma := \Omega_d \cap \Omega_m$  (voir Figure 5.1). On définit les fonctions  $\varepsilon, \mu \in L^\infty(D)$  constantes par morceaux prenant respectivement les valeurs  $\varepsilon_d, \mu_d$  dans  $D_d$  et  $\varepsilon_m(\omega), \mu_m$  dans  $D_m$ . On définit aussi leurs inverses  $\varepsilon^{-1}, \mu^{-1} \in L^\infty(D)$ . Ces fonctions ne dépendent pas de  $z$  et nous les noterons de la même façon lorsque

nous travaillerons dans la section  $\Omega$ . Notons que  $\varepsilon$  dépend de  $\omega$  puisque  $\varepsilon_m$  en dépend. Précisons quelques notations :

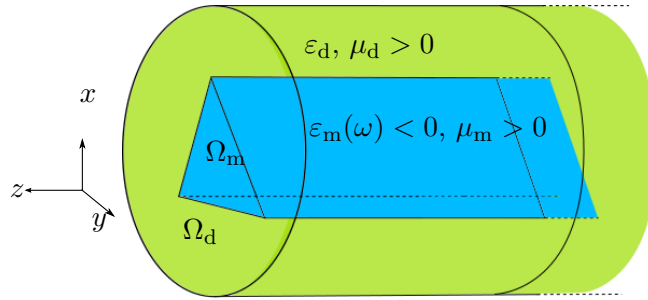


FIGURE 5.1 – Géométrie considérée. La section du guide est bornée, choisie circulaire ici mais elle peut être de forme arbitraire.

- On note  $\underline{\mathbf{u}}$  un vecteur de  $\mathbb{R}^3$ .
- On note  $\mathbf{u}$  un vecteur de  $\mathbb{R}^3$  dépendant seulement de  $(x, y)$ .
- On note  $\vec{u}$  un vecteur de  $\mathbb{R}^2$ .
- De même, les espaces ainsi que les opérateurs seront généralement notés en gras pour  $\mathbb{R}^3$  et avec une flèche pour  $\mathbb{R}^2$ .

On se place en régime harmonique (convention  $e^{-i\omega t}$ ) et en l'absence de courant de densité les champs  $(\underline{\mathbf{E}}, \underline{\mathbf{H}})$  sont solutions du système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \underline{\mathbf{E}}, \underline{\mathbf{H}} \in \mathbf{L}_{\text{loc}}^2(D) \text{ tels que :} \\ \mathbf{rot} \underline{\mathbf{E}} - i\omega\mu\underline{\mathbf{H}} = 0 \quad \text{dans } D, \\ \mathbf{rot} \underline{\mathbf{H}} + i\omega\varepsilon(\omega)\underline{\mathbf{E}} = 0 \quad \text{dans } D, \\ \underline{\mathbf{E}} \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \partial D. \end{array} \right. \quad (5.1)$$

La dernière équation de (5.1) est la condition aux limites satisfaite par le champ électrique lorsque le guide est entouré d'un conducteur parfait (la condition aux limites satisfaite par le champ magnétique s'en déduisant),  $\mathbf{n}$  étant la normale sortante (de par la géométrie  $\mathbf{n}$  ne dépend pas de  $z$ ). Toute paire  $(\underline{\mathbf{E}}, \underline{\mathbf{H}})$  solution de (5.1) est solution du système découplé :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \underline{\mathbf{E}} \in \mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}; D) \text{ tel que :} \\ \mathbf{rot} \mu^{-1} \mathbf{rot} \underline{\mathbf{E}} - \omega^2\varepsilon(\omega)\underline{\mathbf{E}} = 0 \quad \text{dans } D, \\ \underline{\mathbf{E}} \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \partial D, \end{array} \right. \quad (5.2)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \underline{\mathbf{H}} \in \mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}; D) \text{ tel que :} \\ \mathbf{rot} \varepsilon^{-1}(\omega) \mathbf{rot} \underline{\mathbf{H}} - \omega^2\mu\underline{\mathbf{H}} = 0 \quad \text{dans } D, \\ \varepsilon^{-1}(\omega) \mathbf{rot} \underline{\mathbf{H}} \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \partial D, \end{array} \right. \quad (5.3)$$

où  $\mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}; D) := \{\underline{\mathbf{u}} \in \mathbf{L}_{\text{loc}}^2(D) \mid \mathbf{rot}(\underline{\mathbf{u}}) \in \mathbf{L}_{\text{loc}}^2(D)\}$ . Notons que de (5.2)-(5.3) on déduit aussi les conditions suivantes :

$$\mu\underline{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \partial D, \quad \text{div}(\mu\underline{\mathbf{H}}) = 0 \quad \text{dans } D, \quad \text{et} \quad \text{div}(\varepsilon(\omega)\underline{\mathbf{E}}) = 0 \quad \text{dans } D. \quad (5.4)$$

Nous allons chercher les modes guidés (de nombre d'onde  $\beta$ ) de (5.2)-(5.3), c'est-à-dire des solutions sous la forme

$$\underline{\mathbf{E}}(x, y, z)e^{-i\omega t} = \mathbf{E}(x, y)e^{i(\beta z - \omega t)} \text{ et } \underline{\mathbf{H}}(x, y, z, t)e^{-i\omega t} = \mathbf{H}(x, y)e^{i(\beta z - \omega t)}, \quad (5.5)$$

$$\forall (x, y, z) \in D, t \in \mathbb{R}, \omega, \beta \in \mathbb{R}.$$

En injectant cette forme de solution dans (5.2)-(5.3), nous nous ramenons à l'étude d'un problème dans la section  $\Omega$ . On définit alors de nouveaux opérateurs dépendant de  $\beta$ . Pour tout vecteur  $\mathbf{F} \in (\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2))^3$  on note  $\mathbf{F} = (\vec{F}_\perp, F_z)^t$  avec  $\vec{F}_\perp = (F_x, F_y)^t$ , et l'on définit

$$\mathbf{rot}_\beta \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \vec{rot} F_z \\ \vec{rot} \vec{F}_\perp \end{pmatrix} - i\beta \begin{pmatrix} F_y \\ -F_x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{div}_\beta \mathbf{F} = \text{div} \vec{F}_\perp + i\beta F_z, \quad \nabla_\beta \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \nabla \vec{F}_\perp \\ i\beta F_z \end{pmatrix},$$

avec les opérateurs rotationnels 2D :  $\forall \vec{F} = (F_x, F_y)^t \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)^2, \forall F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2),$

$$\vec{rot} F = \left( \frac{\partial F}{\partial y}, -\frac{\partial F}{\partial x} \right)^t, \quad \text{rot} \vec{F} = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}.$$

**Remarque 5.1.** Dans toute la suite les opérateurs  $\text{div}_\beta$  et  $\nabla_\beta$  s'appliqueront toujours à un vecteur de  $\mathbb{R}^3$ , tandis que les opérateurs  $\text{div}$  et  $\nabla$  s'appliqueront toujours à un vecteur de  $\mathbb{R}^2$ . Pour cette raison nous ne les noterons pas en gras ni avec une flèche.

Ainsi nous avons en particulier pour  $\underline{\mathbf{H}}$  et  $\mathbf{H}$  liés par (5.5),

$$\mathbf{rot} \underline{\mathbf{H}} = \mathbf{rot}_\beta \mathbf{H}, \quad \text{div} \underline{\mathbf{H}} = \text{div}_\beta \mathbf{H}, \quad \nabla \underline{\mathbf{H}} = \nabla_\beta \mathbf{H}, \quad \forall \underline{\mathbf{H}},$$

et l'on peut remarquer avec l'expression de  $\mathbf{rot}_\beta$  que

$$\underline{\mathbf{H}} \in \mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}; D) \iff \mathbf{H} \in \mathbf{W}(\Omega) := \{ \mathbf{F} = (\vec{F}_\perp, F_z)^t \mid \vec{F}_\perp \in \vec{H}(\text{rot}; \Omega), F_z \in H^1(\Omega) \},$$

où  $\vec{H}(\text{rot}; \Omega)$  est l'espace classique  $\vec{H}(\text{rot}; \Omega) := \{ \vec{F} \in \vec{L}^2(\Omega) \mid \text{rot} \vec{F} \in L^2(\Omega) \}$ . Ainsi le système (5.2)-(5.3) est équivalent à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{E} \in \mathbf{W}(\Omega) \text{ tel que :} \\ \mathbf{rot}_\beta \mu^{-1} \mathbf{rot}_\beta \mathbf{E} - \omega^2 \varepsilon(\omega) \mathbf{E} = 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{E} \times \mathbf{n}_\Omega = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{array} \right. \quad (5.6)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{H} \in \mathbf{W}(\Omega) \text{ tel que :} \\ \mathbf{rot}_\beta \varepsilon^{-1}(\omega) \mathbf{rot}_\beta \mathbf{H} - \omega^2 \mu \mathbf{H} = 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ \varepsilon^{-1}(\omega) \mathbf{rot}_\beta \mathbf{H} \times \mathbf{n}_\Omega = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{array} \right. \quad (5.7)$$

avec  $\mathbf{n}_\Omega = (\vec{n}, 0)^t$ . Notons dans ce cas que (5.4) devient :

$$\mu \vec{H}_\perp \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad \text{div}(\mu \vec{H}_\perp) + i\beta \mu H_z = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad \text{div}(\varepsilon \vec{E}_\perp) + i\beta \varepsilon E_z = 0 \quad \text{dans } \Omega.$$

Le but est de résoudre les problèmes : "déterminer  $\beta, \omega \in \mathbb{R}$  tels qu'il existe  $\mathbf{E} \neq \mathbf{0}$  vérifiant (5.6)", ou "déterminer  $\beta, \omega \in \mathbb{R}$  tels qu'il existe  $\mathbf{H} \neq \mathbf{0}$  vérifiant (5.7)". On parle de problèmes électromagnétiques 2,5D car ce sont des problèmes posés dans la section  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , cependant ils mettent en jeu les trois composantes des champs  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ . Nous annonçons d'ores et déjà que les composantes  $\vec{E}_\perp, \vec{H}_\perp$  vont jouer un rôle différent de  $E_z, H_z$ , ce qui est normal étant donnée la nature des ondes cherchées. Dans toute la suite nous nous concentrerons sur le problème magnétique (5.7). Nous reviendrons sur le problème électrique en fin de chapitre.



### 5.1.2 Formulation du problème de valeurs propres magnétique

Comme pour l'étude du guide d'ondes scalaire, nous avons deux possibilités pour formuler le problème de valeurs propres, selon que l'on choisit  $\beta$  ou  $\omega$  comme paramètre. Étant donné que les opérateurs dépendent de  $\beta$ , nous faisons le choix de fixer le nombre d'ondes  $\beta$  et de chercher les fréquences de résonances  $\omega^2$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{H}, \omega^2) \in \mathbf{W}(\Omega) \setminus \{0\} \times \mathbb{C} \text{ tels que :} \\ \mathbf{rot}_\beta(\varepsilon^{-1}(\omega) \mathbf{rot}_\beta \mathbf{H}) = \omega^2 \mu \mathbf{H} \quad \text{dans } \Omega. \\ \varepsilon^{-1}(\omega) \mathbf{rot}_\beta \mathbf{H} \times \mathbf{n}_\Omega = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (5.8)$$

Comme  $\mu$  ne prend que des valeurs positives, on peut définir un produit scalaire pondéré par  $\mu$ . On définit alors  $\mathbf{L}_\mu^2(\Omega)$  l'espace  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  muni de ce produit scalaire, noté  $(\cdot, \cdot)_{\Omega, \mu} := (\mu \cdot, \cdot)_\Omega$ .

**Remarque 5.2.** *Sans distinction suivant la dimension  $d$  ( $d = 1, 2, 3$ ), on notera  $(\cdot, \cdot)_{\Omega, \mu}$  le produit scalaire pondéré de  $(L^2(\Omega))^d$ , et  $(\cdot, \cdot)_\Omega$  le produit scalaire classique de  $(L^2(\Omega))^d$ .*

Les difficultés pour résoudre (5.8) sont que le problème est non linéaire en  $\omega$  et que  $\varepsilon$  change de signe. Comme précédemment, traitons les difficultés une par une en gelant la dépendance en  $\omega$  de la permittivité  $\varepsilon_m$ . Nous allons étudier le problème *linéarisé* :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour } \beta \in \mathbb{R}, \text{ trouver } (\mathbf{H}, \omega^2) \in \mathbf{W}(\Omega) \setminus \{0\} \times \mathbb{C} \text{ tels que :} \\ \mathbf{rot}_\beta(\varepsilon^{-1} \mathbf{rot}_\beta \mathbf{H}) = \omega^2 \mu \mathbf{H} \quad \text{dans } \Omega, \\ \varepsilon^{-1} \mathbf{rot}_\beta \mathbf{H} \times \mathbf{n}_\Omega = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (5.9)$$

Pour trouver les solutions de (5.8) il suffira de vérifier que, en se rappelant que  $\varepsilon$  dépend de  $\omega$ , les solutions  $\omega^2(\varepsilon)$  de (5.9) sont solutions de l'équation de point fixe  $\omega^2(\varepsilon) = \omega^2$ .

On définit  $\tilde{A}(\beta)$  l'opérateur non borné de  $\mathbf{L}_\mu^2(\Omega)$  par

$$\left\{ \begin{array}{l} D(\tilde{A}(\beta)) = \{\mathbf{F} \in \mathbf{W}(\Omega) \mid \mathbf{rot}_\beta \varepsilon^{-1} \mathbf{rot}_\beta \mathbf{F} \in \mathbf{L}^2(\Omega), \varepsilon^{-1} \mathbf{rot}_\beta \mathbf{F} \times \mathbf{n}_\Omega = 0 \text{ sur } \partial\Omega\} \\ \tilde{A}(\beta)\mathbf{H} = \mu^{-1} \mathbf{rot}_\beta \varepsilon^{-1} \mathbf{rot}_\beta \mathbf{H}, \quad \forall \mathbf{H} \in D(\tilde{A}(\beta)), \end{array} \right. \quad (5.10)$$

si bien que (5.9) peut s'écrire sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour } \beta \in \mathbb{R}, \text{ trouver } (\mathbf{H}, \omega^2) \in D(\tilde{A}(\beta)) \setminus \{0\} \times \mathbb{C} \text{ tels que :} \\ \tilde{A}(\beta)\mathbf{H} = \omega^2 \mathbf{H} \quad \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (5.11)$$

L'inconvénient de travailler avec  $\tilde{A}(\beta)$  est que 0 est valeur propre de multiplicité infinie. En effet pour tout  $\varphi \in H^1(\Omega)$ , on vérifie aisément que  $\nabla_\beta \varphi \in D(\tilde{A}(\beta))$  et  $\tilde{A}(\beta)\nabla_\beta \varphi = 0$  puisque  $\mathbf{rot}_\beta(\nabla_\beta \varphi) = 0$ . Pour contourner cette difficulté il suffit de prendre compte le fait que  $\mathbf{H}$  est à divergence nulle. Une première technique classique consiste à travailler avec une formule *régularisée*, c'est-à-dire qui prend explicitement en compte la divergence dans l'opérateur via un multiplicateur de Lagrange [11, 7] (nous renvoyons par exemple à [119] pour un exemple avec changement de signe). Une autre approche possible est de travailler avec la restriction de  $\tilde{A}(\beta)$  à un sous-espace fermé de  $\mathbf{L}_\mu^2(\Omega)$ , qui prend en compte cette condition [116]. Pour cela on définit

$$\mathbf{L}_{\mu, \beta}^2(\Omega) := \{\mathbf{F} \in \mathbf{L}_\mu^2(\Omega) \mid \operatorname{div}_\beta(\mu \mathbf{F}) = 0 \text{ dans } \Omega, \mu \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_\Omega = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

Par la formule de Green [65] <sup>(1)</sup>,  $\mathbf{L}_{\mu, \beta}^2(\Omega)$  peut aussi s'écrire

$$\mathbf{L}_{\mu, \beta}^2(\Omega) := \{\mathbf{F} \in \mathbf{L}_\mu^2(\Omega) \mid (\mathbf{F}, \nabla_\beta \Psi)_{\Omega, \mu} = 0 \text{ dans } \Omega, \forall \Psi \in H^1(\Omega)\},$$

1. On rappelle les formules de Green :  $(\mathbf{v}, \nabla \varphi)_\Omega + (\operatorname{div}(\mathbf{v}), \varphi)_\Omega = \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, \varphi \rangle_{\partial\Omega}$ ,  $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$  tel que  $\operatorname{div} \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ ,  $\forall \varphi \in H^1(\Omega)$ , et  $(\mathbf{v}, \mathbf{rot} \varphi)_\Omega - (\mathbf{rot} \mathbf{v}, \varphi)_\Omega = \langle \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}, \varphi \rangle_{\partial\Omega}$ ,  $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$  tel que  $\mathbf{rot} \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ ,  $\forall \varphi \in H^1(\Omega)$ .

et par conséquent

$$\mathbf{L}^2_\mu(\Omega) = \mathbf{L}^2_{\mu,\beta}(\Omega) \oplus \{\nabla_\beta \Psi, \Psi \in H^1(\Omega)\}.$$

On vérifie facilement avec la formule de Green <sup>(1)</sup> que

$$\forall \mathbf{F} \in D(\tilde{A}(\beta)) \cap \mathbf{L}^2_{\mu,\beta}(\Omega), \quad \tilde{A}(\beta)\mathbf{F} \in \mathbf{L}^2_{\mu,\beta}(\Omega).$$

Ainsi nous pouvons travailler avec la restriction de l'opérateur  $\tilde{A}(\beta)$  à  $\mathbf{L}^2_{\mu,\beta}(\Omega)$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} A(\beta) := D(A(\beta)) \subset \mathbf{L}^2_{\mu,\beta}(\Omega) \rightarrow \mathbf{L}^2_{\mu,\beta}(\Omega) \\ D(A(\beta)) = \{\mathbf{F} \in \mathbf{V}_T(\beta; \mu; \Omega) \mid \mathbf{rot}_\beta \varepsilon^{-1} \mathbf{rot}_\beta \mathbf{F} \in \mathbf{L}^2(\Omega), \varepsilon^{-1} \mathbf{rot}_\beta \mathbf{F} \times \mathbf{n}_\Omega = 0 \text{ sur } \partial\Omega\} \\ A(\beta)\mathbf{H} = \mu^{-1} \mathbf{rot}_\beta \varepsilon^{-1} \mathbf{rot}_\beta \mathbf{H}, \quad \forall \mathbf{H} \in D(A(\beta)), \end{array} \right. \quad (5.12)$$

où

$$\mathbf{V}_T(\beta; \mu; \Omega) = \mathbf{W}(\Omega) \cap \mathbf{L}^2_{\mu,\beta}(\Omega).$$

Ceci nous amène à résoudre le problème de valeurs propres

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour } \beta \in \mathbb{R}, \text{ trouver } (\mathbf{H}, \omega^2) \in D(A(\beta)) \setminus \{0\} \times \mathbb{C} \text{ tels que :} \\ A(\beta)\mathbf{H} = \omega^2 \mathbf{H} \quad \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (5.13)$$

L'intérêt de se restreindre à cet espace est que la forme bilinéaire associée à  $A(\beta)$  est définie sur  $\mathbf{V}_T(\beta; \mu; \Omega) \times \mathbf{V}_T(\beta; \mu; \Omega)$  (voir section 5.1.3), or  $\mathbf{V}_T(\beta; \mu; \Omega)$  s'injecte de façon compacte dans  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  [133] (voir remarque 5.5). Pour pouvons dans ce cas utiliser la théorie de Fredholm. Notre but est donc de caractériser le spectre  $\sigma(A(\beta))$  de  $A(\beta)$ .

Nous terminons cette section par quelques remarques.

**Remarque 5.3.** *Il est facile de vérifier que nous avons la décomposition*

$$\mathbf{W}(\Omega) := \mathbf{V}_T(\beta; \mu; \Omega) \oplus \{\nabla_\beta \Psi, \Psi \in H^1(\Omega)\},$$

et que  $\mathbf{V}_T(\beta; \mu; \Omega)$  est dense dans  $\mathbf{L}^2_\mu(\Omega)$ .

**Remarque 5.4.** *Maintenant que nous avons négligé la dépendance en fréquence dans  $\varepsilon$ , l'opérateur du problème linéarisé a son domaine indépendant du paramètre spectral (ici  $\omega^2$ ). Si l'on avait choisi  $\omega$  comme paramètre, que la permittivité dépende ou non de  $\omega$ , le domaine de l'opérateur n'est alors jamais indépendant de  $\beta$  (ceci à cause des opérateurs  $\mathbf{rot}_\beta$ ). Il y a donc ici un choix nettement plus avantageux de choix de paramètre. Notons que dans le chapitre 4, c'est le contraire : l'opérateur associé au problème de valeurs propres scalaire est de domaine indépendant de  $\beta$  quelque soit le paramètre choisi ( $\beta$  ou  $\omega$ ), cf. (4.6)-(4.7).*

**Remarque 5.5.** *Si le milieu que l'on considère est composé d'un diélectrique et, à la place d'un métal, d'un métamatériau ( $\varepsilon < 0$  et  $\mu < 0$ ) [114, 124, 1], le résultat de compacité de  $\mathbf{V}_T(\beta; \mu; \Omega)$  dans  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  n'est pas garanti pour toutes les valeurs de  $\mu$ . Nous renvoyons à [39] où la question a été traitée : comme pour l'étude des problèmes de transmission scalaires avec changement de signe, on peut retrouver le caractère compact si le contraste  $\kappa_\mu := \mu_m/\mu_d$  n'appartient pas à un intervalle (critique).*

### 5.1.3 Approche variationnelle

Il est pratique d'avoir recours à l'approche variationnelle pour étudier les valeurs propres d'un opérateur. Commençons donc par introduire la forme bilinéaire associée à  $\tilde{A}(\beta)$ .

**Proposition 5.1.** *Le problème (5.11) est équivalent à :*

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{H} = (\overrightarrow{H_\perp}, H_z)^t \in \mathbf{W}(\Omega) \setminus \{0\}, \omega^2 \in \mathbb{C} \text{ tels que :} \\ \tilde{a}(\beta; \mathbf{H}, \mathbf{H}') = \omega^2 (\mathbf{H}, \mathbf{H}')_{\Omega, \mu}, \quad \forall \mathbf{H}' \in \mathbf{W}(\Omega), \end{array} \right. \quad (5.14)$$

avec  $\tilde{a}(\beta; \mathbf{H}, \mathbf{H}') := \int_{\Omega} \varepsilon^{-1} \mathbf{rot}_\beta \mathbf{H} \cdot \overline{\mathbf{rot}_\beta \mathbf{H}'}$ ,  $\forall \mathbf{H}, \mathbf{H}' \in \mathbf{W}(\Omega)$ . La forme  $\tilde{a}(\beta; \cdot, \cdot)$  est la forme bilinéaire associée à  $\tilde{A}(\beta)$  défini dans (5.10), et  $(\tilde{A}(\beta)\mathbf{H}, \mathbf{H}')_{\Omega, \mu} = \tilde{a}(\beta; \mathbf{H}, \mathbf{H}')$ ,  $\forall \mathbf{H} \in D(\tilde{A}(\beta)) \times \mathbf{W}(\Omega)$ .

**Preuve.** ★Soit  $(\mathbf{H}, \omega^2)$  solution de (5.11), en effectuant le produit scalaire  $\mathbf{L}_\mu^2$  contre toute fonction test  $\mathbf{H}' \in \mathbf{W}(\Omega)$ , avec la formule de Green et la condition aux limites on obtient (5.14).

★Soit  $(\mathbf{H}, \omega^2)$  solution de (5.14), comme  $\mathcal{D}(\Omega)^3$  est inclus dans  $\mathbf{W}(\Omega)$ , on peut raisonner au sens des distributions et nous obtenons  $\mathbf{rot}_\beta \varepsilon^{-1} \mathbf{rot}_\beta \mathbf{H} = \omega^2 \mu \mathbf{H}$ . On en déduit que  $\mathbf{rot}_\beta \varepsilon^{-1} \mathbf{rot}_\beta \mathbf{H} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ . En intégrant par parties l'équation précédente et en identifiant avec la formulation variationnelle (5.14) on obtient que  $\langle \varepsilon^{-1} \mathbf{rot}_\beta \mathbf{H} \times \mathbf{n}_\Omega, \mathbf{H}' \rangle = 0$ ,  $\forall \mathbf{H}' \in \mathbf{W}(\Omega)$ . Comme  $\Omega$  est simplement connexe on en déduit  $\varepsilon^{-1} \mathbf{rot}_\beta \mathbf{H} \times \mathbf{n}_\Omega = 0$  sur  $\partial\Omega$ , soit  $\mathbf{H} \in D(\tilde{A}(\beta))$ .  $\square$

Ce n'est pas cette formulation variationnelle que nous allons résoudre puisque  $\mathbf{W}(\Omega)$  ne s'injecte de pas de façon compacte dans  $\mathbf{L}_\mu^2(\Omega)$ , mais celle mettant en jeu la forme bilinéaire associée à  $A(\beta)$ . Celle-ci doit être définie sur des espaces fonctionnels plus petits pour les champs (et surtout les champs tests).

**Proposition 5.2.** *Le problème (5.13) est équivalent à :*

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{H} = (\overrightarrow{H_\perp}, H_z)^t \in \mathbf{V}_T(\beta; \mu; \Omega) \setminus \{0\}, \omega^2 \in \mathbb{C} \text{ tels que :} \\ a(\beta; \mathbf{H}, \mathbf{H}') = \omega^2 (\mathbf{H}, \mathbf{H}')_{\Omega, \mu}, \quad \forall \mathbf{H}' \in \mathbf{V}_T(\beta; \mu; \Omega), \end{array} \right. \quad (5.15)$$

avec  $a(\beta; \mathbf{H}, \mathbf{H}') := \int_{\Omega} \varepsilon^{-1} \mathbf{rot}_\beta \mathbf{H} \cdot \overline{\mathbf{rot}_\beta \mathbf{H}'}$ ,  $\forall \mathbf{H}, \mathbf{H}' \in \mathbf{V}_T(\beta; \mu; \Omega)$ . La forme  $a(\beta; \cdot, \cdot)$  est la forme bilinéaire associée à  $A(\beta)$  défini dans (5.12), et  $(A(\beta)\mathbf{H}, \mathbf{H}')_{\Omega, \mu} = a(\beta; \mathbf{H}, \mathbf{H}')$ ,  $\forall \mathbf{H} \in D(A(\beta)) \times \mathbf{V}_T(\beta; \mu; \Omega)$ .

**Preuve.** ★Soit  $(\mathbf{H}, \omega^2)$  solution de (5.13), comme précédemment on montre par intégration par parties que  $(\mathbf{H}, \omega^2)$  satisfait (5.15). C'est l'autre sens qui nécessite plus de travail car l'espace des fonctions tests a été réduit.

★Soit  $(\mathbf{H}, \omega^2)$  solution de (5.15). Nous allons montrer que  $(\mathbf{H}, \omega^2)$  satisfait (5.14), puis la proposition 5.1 permet de conclure. Pour tout  $\mathbf{H}' \in \mathbf{W}(\Omega)$ , en utilisant la décomposition  $\mathbf{W}(\Omega)$ , il existe un unique  $\Psi \in H^1(\Omega)$  tel que  $\mathbf{H}' - \nabla_\beta \Psi \in \mathbf{V}_T(\beta; \mu; \Omega)$ . En injectant dans (5.15) on obtient alors (par définition  $(\mathbf{H}, \nabla_\beta \Psi)_{\Omega, \mu} = 0$ ) :

$$\int_{\Omega} \varepsilon^{-1} \mathbf{rot}_\beta \mathbf{H} \cdot \overline{\mathbf{rot}_\beta \mathbf{H}'} - \omega^2 \int_{\Omega} \mu \mathbf{H} \cdot \overline{\mathbf{H}'} = 0, \quad \forall \mathbf{H}' \in \mathbf{W}(\Omega).$$

Avec la proposition 5.1 on conclut que  $\mathbf{H} \in D(A(\beta))$ .  $\square$

On définit aussi les formes bilinéaires suivantes :

$$\begin{aligned} a_{\perp}(\vec{u}, \vec{v}) &:= \int_{\Omega} \varepsilon^{-1} \operatorname{rot} \vec{u} \cdot \overline{\operatorname{rot} \vec{v}}, \quad \forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{H}(\operatorname{rot}; \Omega), \\ a_z(u, v) &:= \int_{\Omega} \varepsilon^{-1} \nabla u \cdot \overline{\nabla v}, \quad \forall (u, v) \in H^1(\Omega), \\ c(\beta; \mathbf{u}, \mathbf{v}) &:= i\beta \int_{\Omega} \varepsilon^{-1} \left( \nabla u_z \cdot \overline{v'_{\perp}} - \overline{u_{\perp}} \cdot \nabla v'_z \right) + \beta^2 \int_{\Omega} \varepsilon^{-1} \overline{u_{\perp}} \cdot \overline{v'_{\perp}}, \quad \forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbf{W}(\Omega). \end{aligned}$$

En développant  $\mathbf{rot}_{\beta}$ , le problème (5.15) peut se réécrire

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{H} = (\overline{H_{\perp}}, H_z)^t \in \mathbf{V}_T(\beta; \mu; \Omega) \setminus \{0\}, \omega^2 \in \mathbb{C} \text{ tels que :} \\ a_{\perp}(\overline{H_{\perp}}, \overline{H'_{\perp}}) + a_z(H_z, H'_z) + c(\beta; \mathbf{H}, \mathbf{H}') = \omega^2(\mathbf{H}, \mathbf{H}')_{\Omega, \mu}, \quad \forall \mathbf{H}' \in \mathbf{V}_T(\beta; \mu; \Omega). \end{array} \right.$$

Notons que les formes  $a_{\perp}(\cdot, \cdot)$  et  $a_z(\cdot, \cdot)$  sont hermitiennes, ainsi que  $c(\beta; \cdot, \cdot)$ . En effet, pour tout  $\mathbf{H}, \mathbf{H}' \in \mathbf{V}_T(\beta; \mu; \Omega)$  :

$$\begin{aligned} c(\beta; \mathbf{H}, \mathbf{H}') &= i\beta \int_{\Omega} \varepsilon^{-1} \left( \nabla H_z \cdot \overline{H'_{\perp}} - \overline{H_{\perp}} \cdot \nabla H'_z \right) + \beta^2 \int_{\Omega} \varepsilon^{-1} \overline{H_{\perp}} \cdot \overline{H'_{\perp}}, \\ &= \overline{i\beta \int_{\Omega} \varepsilon^{-1} \left( \overline{H'_{\perp}} \cdot \nabla H_z - \nabla H'_z \cdot \overline{H_{\perp}} \right) + \beta^2 \int_{\Omega} \varepsilon^{-1} \overline{H'_{\perp}} \cdot \overline{H_{\perp}}}, \\ &= \overline{i\beta \int_{\Omega} \varepsilon^{-1} \left( \nabla H'_z \cdot \overline{H_{\perp}} - \overline{H'_{\perp}} \cdot \nabla H_z \right) + \beta^2 \int_{\Omega} \varepsilon^{-1} \overline{H'_{\perp}} \cdot \overline{H_{\perp}}}, \\ &= \overline{c(\beta; \mathbf{H}', \mathbf{H})}. \end{aligned}$$

Maintenant que nous avons la formulation variationnelle, il ne nous reste plus qu'à étudier le caractère auto-adjoint de l'opérateur  $A(\beta)$  en utilisant le théorème 4.1 : puisque la forme  $a(\beta; \cdot, \cdot)$  est hermitienne, l'opérateur  $A(\beta)$  est symétrique donc il suffit de montrer que les opérateurs  $A(\beta) - \lambda I_{\mathbf{L}^2_{\mu, \beta}(\Omega)}$  et  $A(\beta) - \overline{\lambda} I_{\mathbf{L}^2_{\mu, \beta}(\Omega)}$  sont surjectifs pour tout  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ . Une manière de procéder est de montrer que les formes bilinéaires associées à ces opérateurs sont coercives sur  $\mathbf{V}_T(\beta; \mu; \Omega)$ . Or comme  $\varepsilon$  change de signe, nous allons utiliser la T-coercivité. Le but des sections suivantes est d'établir que la forme  $a_{\perp}(\cdot, \cdot) + a_z(\cdot, \cdot) + c(\beta; \cdot, \cdot)$  est faiblement T-coercive (voir chapitre 2). En fait on peut se contenter de montrer que  $a_{\perp}(\cdot, \cdot) + a_z(\cdot, \cdot)$  est faiblement T-coercive puisque  $c(\beta; \cdot, \cdot)$  est en faite une perturbation compacte. Expliquons.

**Proposition 5.3.** *L'opérateur borné*

$$\begin{aligned} \widehat{C}(\beta) : \mathbf{V}_T(\beta; \mu; \Omega) &\longrightarrow \mathbf{V}_T(\beta; \mu; \Omega) \text{ tel que } \forall (\mathbf{H}, \mathbf{H}') \in \mathbf{V}_T(\beta; \mu; \Omega) \times \mathbf{V}_T(\beta; \mu; \Omega), \\ (\widehat{C}(\beta)\mathbf{H}, \mathbf{H}')_{\mathbf{V}_T(\beta; \mu; \Omega)} &= c(\beta; \mathbf{H}, \mathbf{H}'), \end{aligned}$$

est un opérateur compact.

Ci-dessus  $(\cdot, \cdot)_{\mathbf{V}_T(\beta; \mu; \Omega)}$  désigne le produit scalaire sur  $\mathbf{V}_T(\beta; \mu; \Omega)$ . On peut le définir comme  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{rot}_{\beta}} := (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\Omega} + (\mathbf{rot}_{\beta} \mathbf{u}, \mathbf{rot}_{\beta} \mathbf{v})_{\Omega}$  pour tout  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}_T(\beta; \mu; \Omega)$  ou avec l'application  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto (\mathbf{rot}_{\beta} \mathbf{u}, \mathbf{rot}_{\beta} \mathbf{v})_{\Omega}$ . Ce dernier est tel que sa norme associée est équivalente à la norme canonique  $\mathbf{u} \mapsto (\mathbf{u}, \mathbf{u})_{\mathbf{rot}_{\beta}}^{1/2}$ .

**Preuve.** Soit  $(\mathbf{H}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite bornée de  $\mathbf{V}_T(\beta; \mu; \Omega)$ , alors par compacité on peut en extraire une sous-suite qui converge dans  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ . Dans toute la suite  $C > 0$  désigne une constante générique pouvant

changer d'une ligne à l'autre, indépendante de  $n$ . On note  $\mathbf{H}_{nm} := \mathbf{H}_n - \mathbf{H}_m$  pour tout  $n, m$ . Nous avons

$$\begin{aligned} \|\widehat{C}(\beta)\mathbf{H}_{nm}\|_{\mathbf{V}_T(\beta;\mu;\Omega)}^2 &\leq C \left( \int_{\Omega} \left| \nabla H_{nm,z} \cdot \overrightarrow{(\widehat{C}(\beta)\mathbf{H}_{nm})_{\perp}} \right| + \left| \vec{H}_{nm,\perp} \cdot \nabla(\widehat{C}(\beta)\mathbf{H}_{nm})_z \right| \right. \\ &\quad \left. + \left| \vec{H}_{nm,\perp} \cdot \overrightarrow{(\widehat{C}(\beta)\mathbf{H}_{nm})_{\perp}} \right| \right), \\ &\leq C \left( \|\nabla H_{nm,z}\|_{L^2(\Omega)} \|\overrightarrow{(\widehat{C}(\beta)\mathbf{H}_{nm})_{\perp}}\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla(\widehat{C}(\beta)\mathbf{H}_{nm})_z\|_{L^2(\Omega)} \|\vec{H}_{nm,\perp}\|_{L^2(\Omega)} \right. \\ &\quad \left. + \|\vec{H}_{nm,\perp}\|_{L^2(\Omega)} \|\overrightarrow{(\widehat{C}(\beta)\mathbf{H}_{nm})_{\perp}}\|_{L^2(\Omega)} \right), \\ &\leq C \left( \|\mathbf{H}_{nm}\|_{\mathbf{V}_T(\beta;\mu;\Omega)} \|\widehat{C}(\beta)\mathbf{H}_{nm}\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{H}_{nm}\|_{\Omega} \|\widehat{C}(\beta)\mathbf{H}_{nm}\|_{\mathbf{V}_T(\beta;\mu;\Omega)} \right). \end{aligned}$$

Comme  $\widehat{C}(\beta)$  est un opérateur continu de  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  nous avons

$$\|\widehat{C}(\beta)\mathbf{H}_{nm}\|_{\mathbf{V}_T(\beta;\mu;\Omega)}^2 \leq C \|\mathbf{H}_{nm}\|_{\Omega} \left( \|\mathbf{H}_{nm}\|_{\mathbf{V}_T(\beta;\mu;\Omega)} + \|\widehat{C}(\beta)\mathbf{H}_{nm}\|_{\mathbf{V}_T(\beta;\mu;\Omega)} \right) \leq C \|\mathbf{H}_{nm}\|_{\Omega}.$$

Comme la suite  $(\mathbf{H}_n)_n$  est de Cauchy dans  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ , on en déduit que la suite  $(\widehat{C}(\beta)\mathbf{H}_n)_n$  est aussi de Cauchy dans  $\mathbf{V}_T(\beta;\mu;\Omega)$ . Comme c'est un espace complet, on en déduit que  $(\widehat{C}(\beta)\mathbf{H}_n)_n$  converge dans  $\mathbf{V}_T(\beta;\mu;\Omega)$ .  $\square$

Cherchons donc à montrer que la forme  $a := a_z + a_{\perp}$  est faiblement T-coercive.

## 5.2 La T-coercivité pour Maxwell 2, 5D

Le but de cette section est de construire un isomorphisme  $\mathbf{T}$  de  $\mathbf{V}_T(\beta;\mu;\Omega)$  et  $\mathbf{C}$  un opérateur compact tels que

$$\exists C > 0, C_0 \in \mathbb{R} \text{ tels que } \forall \mathbf{H} \in \mathbf{V}_T(\beta;\mu;\Omega), a(\mathbf{H}, \mathbf{T}\mathbf{H}) \geq C \|\mathbf{H}\|_{\mathbf{V}_T(\beta;\mu;\Omega)}^2 - C_0 \|\mathbf{C}\mathbf{H}\|_{\mathbf{V}_T(\beta;\mu;\Omega)}^2.$$

Avant de continuer, regardons ce qu'il se passe pour le cas  $\beta = 0$ . Partant du problème (5.9), on remarque que les composantes  $\vec{H}_{\perp}$  et  $H_z$  sont découplées :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{H}, \omega^2) \in \mathbf{W}(\Omega) \setminus \{0\} \times \mathbb{C} \text{ tels que :} \\ \left( \begin{array}{l} \overrightarrow{\text{rot}} \varepsilon^{-1} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{H}_{\perp} \\ \overrightarrow{\text{rot}} \varepsilon^{-1} \overrightarrow{\text{rot}} H_z \end{array} \right) = \omega^2 \mu \begin{pmatrix} \vec{H}_{\perp} \\ H_z \end{pmatrix} \quad \text{dans } \Omega, \\ \varepsilon^{-1} \overrightarrow{\text{rot}} H_z \times \vec{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad \varepsilon^{-1} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{H}_{\perp} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{array} \right.$$

ce qui s'écrit simplement

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\vec{H}_{\perp}, H_z, \omega^2) \in \vec{H}(\text{rot}; \Omega) \times H^1(\Omega) \setminus \{0, 0\} \times \mathbb{C} \text{ tels que :} \\ \overrightarrow{\text{rot}} \varepsilon^{-1} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{H}_{\perp} = \omega^2 \mu \vec{H}_{\perp} \quad \text{dans } \Omega, \\ \varepsilon^{-1} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{H}_{\perp} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \\ \text{div}(\varepsilon^{-1} \nabla H_z) = \omega^2 \mu H_z \quad \text{dans } \Omega, \\ \varepsilon^{-1} \nabla H_z \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

Dans le cas découplé, le problème scalaire satisfait par  $(H_z, \omega^2)$  est le problème de valeurs propres scalaire vu au chapitre précédent (avec  $\beta = 0$ ), avec cette fois une condition de Neumann homogène (au lieu de la condition de Dirichlet homogène). On remarque que  $a_z$  en est la forme bilinéaire associée. Nous savons donc d'ores et déjà que le changement de signe de  $\varepsilon$  peut être problématique, et nous pouvons suivre la démarche du chapitre précédent pour étudier les modes en  $H_z$ .

Concernant le problème satisfait par  $(\vec{H}_\perp, \omega^2)$ , on retrouve le problème du second ordre satisfait en l'absence de source par le champ magnétique 2D en polarisation (TM), dont la formulation variationnelle met en jeu la forme bilinéaire  $a_\perp$ . Les équations de Maxwell 2D lorsque  $\varepsilon$  change de signe ont déjà été étudiées avec la méthode de la T-coercivité dans [39, 16, 38]. Nous rappelons par la suite les principaux résultats.

Le cas découplé est donc déjà connu. Lorsque  $\beta \neq 0$ , les composantes sont couplées d'une part avec la forme  $c(\beta; \cdot, \cdot)$  mais surtout par l'espace fonctionnel, et plus précisément la condition sur la divergence. Cela signifie que les résultats cités ci-dessus ne peuvent s'appliquer directement pour la forme  $a$ . Néanmoins, nous allons nous en inspirer pour étudier le cas 2, 5D. Commençons par quelques rappels.

### 5.2.1 La T-coercivité pour $a_z$

Dans cette section, on considère la forme

$$a_z(u, v) := \int_{\Omega} \varepsilon^{-1} \nabla u \cdot \overline{\nabla v}, \quad \forall (u, v) \in H^1(\Omega).$$

Nous souhaitons montrer que la forme  $a_z$  est faiblement T-coercive. En d'autres termes, nous cherchons à construire un isomorphisme  $T_z$  de  $H^1(\Omega)$  et  $C : H^1(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$  (2) un opérateur compact tels que

$$\exists C > 0, C_0 \in \mathbb{R} \text{ tels que } \forall u \in H^1(\Omega), a_z(u, T_z u) \geq C \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 - C_0 \|Cu\|_{H^1(\Omega)}^2. \quad (5.16)$$

Lorsque  $\varepsilon > 0$ ,  $a_z$  est automatiquement faiblement coercive (il suffit de prendre  $T_z = I_{H^1(\Omega)}$  et  $C$  tel que  $(Cu, v)_{H^1} = (u, v)_{\Omega}$  pour tout  $u, v \in H^1(\Omega)$ ). Lorsque  $\varepsilon$  change de signe, comme dans le chapitre 2 nous pouvons construire des isomorphismes  $T$  de  $H^1(\Omega)$  à base de transformations géométriques qui permettent de satisfaire la condition (5.16). En fait nous pouvons utiliser les mêmes opérateurs ! En effet l'action des opérateurs (2.11) est localisée au voisinage de l'interface  $\Sigma$  et la condition aux limites sur  $\partial\Omega$  est toujours satisfaite quelqu'elle soit. De plus nous avons toujours  $T_z \circ T_z = I_{H^1(\Omega)}$ . Notons que ces opérateurs sont aussi des opérateurs continus de  $L^2(\Omega)$  car les opérateurs basés sur des transformations géométriques le sont (voir section 2.4).

En utilisant les mêmes notations que les sections 3.2.2 et 4.1.3 pour décrire la géométrie et l'intervalle critique, l'intervalle critique est alors donné par  $I_c := [-b_\Sigma; -1/b_\Sigma]$ . En utilisant les opérateurs  $T_z = T$ , et  $T_z = T'$  (2.11) (plus les opérateurs (2.12)-(2.13)), on montre la

**Proposition 5.4.** *Soit  $\kappa_\varepsilon \notin I_c = [-b_\Sigma; -1/b_\Sigma]$ . Alors la forme  $a_z$  satisfait (5.16) et est faiblement T-coercive.*

---

2. Dans les chapitres précédents nous avons travaillé sur  $H_0^1(\Omega)$ . Ici nous n'avons aucune raison de nous placer sur  $H_0^1(\Omega)$  puisque  $H_z$  vérifie la condition de Neumann  $\mu \nabla H_z \cdot \vec{n} = 0$  sur  $\partial\Omega$ . Nous renvoyons à [38, chapitre 1] pour plus de détails sur comment assurer le caractère bien posé (c'est-à-dire fixer la constante tout en utilisant les mêmes opérateurs) des problèmes scalaires avec changement de signe avec des conditions aux limites de Neumann. Nous ne cherchons à montrer que le caractère Fredholm, donc nous pouvons simplement travailler dans  $H^1(\Omega)$ , et les opérateurs de T-coercivité construits précédemment sont toujours admissibles.

Dans ce chapitre nous ne traiterons que les cas  $\kappa_\varepsilon \notin I_c$ . Lorsque  $\kappa_\varepsilon \in I_c \setminus \{-1\}$ , nous savons que la forme n'est plus T-coercive et que le caractère Fredholm est perdu à cause de l'apparition de singularités aux coins (voir notamment chapitres 3, 4). L'étude des modes guidés dans ce cas nécessite d'étendre l'opérateur pour les prendre en compte.

### 5.2.2 La T-coercivité pour $a_\perp$

Intéressons-nous maintenant à la forme

$$a_\perp(\vec{u}, \vec{v}) := \int_{\Omega} \varepsilon^{-1} \operatorname{rot} \vec{u} \overline{\operatorname{rot} \vec{v}}, \quad \forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{V}_T(\mu; \Omega),$$

que nous allons étudier non pas dans  $\vec{H}(\operatorname{rot}; \Omega)$  (puisqu'il ne s'injecte pas de façon compacte dans  $L^2(\Omega)$ ) mais dans

$$\vec{V}_T(\mu; \Omega) := \{ \vec{v} \in \vec{H}(\operatorname{rot}; \Omega) \mid (\vec{v}, \nabla \Phi)_{\Omega, \mu} = 0, \forall \Phi \in H^1(\Omega) \}.$$

Lorsque  $\beta = 0$ , on vérifie que le champ  $\vec{H}_\perp \in \vec{V}_T(\mu; \Omega)$ . Nous souhaitons montrer que la forme  $a_\perp$  est faiblement T-coercive, c'est-à-dire construire un isomorphisme  $\mathbf{T}_\perp$  de  $\vec{V}_T(\mu; \Omega)$  et  $\mathbf{C}$  un opérateur compact tels que

$$\exists C > 0, C_0 \in \mathbb{R} \text{ tels que } \forall \vec{u} \in \vec{V}_T(\mu; \Omega), a_\perp(\vec{u}, \mathbf{T}_\perp \vec{u}) \geq C \|\vec{u}\|_{\vec{V}_T(\mu; \Omega)}^2 - C_0 \|\mathbf{C}u\|_{\vec{V}_T(\mu; \Omega)}^2.$$

Nous pouvons définir la norme sur  $\vec{V}_T(\mu; \Omega)$  avec la norme canonique  $(\cdot, \cdot)_{\operatorname{rot}}^{1/2} := ((\cdot, \cdot)_\Omega + (\operatorname{rot} \cdot, \operatorname{rot} \cdot)_\Omega)^{1/2}$  ou la norme équivalente  $(\operatorname{rot} \cdot, \operatorname{rot} \cdot)_\Omega^{1/2}$ .

Étant donné la forme de  $a_\perp$ , nous allons utiliser la seconde norme. Nous avons même un résultat plus fort sur la forme  $a_\perp$  et qui ne dépend du signe de  $\varepsilon$  !

**Proposition 5.5.** *La forme  $a_\perp$  est T-coercive quelque soit le contraste  $\kappa_\varepsilon$  : il existe un isomorphisme  $\mathbf{T}_\perp$  de  $\vec{V}_T(\mu; \Omega)$  tel que*

$$\exists C > 0 \text{ tel que } \forall \vec{u} \in \vec{V}_T(\mu; \Omega), a_\perp(\vec{u}, \mathbf{T}_\perp \vec{u}) \geq C \|\vec{u}\|_{\vec{V}_T(\mu; \Omega)}^2.$$

Le résultat peut paraître surprenant puisqu'il est valable pour toute valeur de  $\varepsilon$ . En fait ceci est naturel pour les équations de Maxwell 2D en polarisation (TM) : en effet, étudier la formulation variationnelle associée à  $\vec{H}_\perp$  est équivalent à étudier celle associée à  $E_z$ . Or pour le problème en  $E_z$  la partie principale (c'est-à-dire le terme avec les dérivées d'ordre 2) ne dépend pas de  $\varepsilon$ , seulement de  $\mu$  :

$$\operatorname{rot} \mu^{-1} \overrightarrow{\operatorname{rot}} E_z - \omega^2 \varepsilon E_z = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad \text{et} \quad E_z = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

La construction d'un tel  $\mathbf{T}_\perp$  a été établie dans [38, 16] dont nous rappelons quelques résultats. La différence avec les problèmes scalaires est que de tels opérateurs  $\mathbf{T}_\perp$  ne sont plus construits à base de transformations géométriques, mais de façon abstraite en utilisant la décomposition de Helmholtz des champs (c'est-à-dire en potentiels).

**Preuve.** On considère le problème

$$\text{"Pour } \vec{u} \in \vec{V}_T(\mu; \Omega), \text{ trouver } \Phi \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que } \operatorname{rot} \mu^{-1} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \Phi = \varepsilon \operatorname{rot} \vec{u} \text{."} \quad (5.17)$$

Comme  $\mu > 0$ , le problème (5.17) admet une unique solution. Construisons  $\mathbf{T}_\perp$  tel que pour tout  $\vec{u} \in \vec{V}_T(\mu; \Omega)$ , on lui associe  $\Phi$  l'unique solution de (5.17) et  $\mathbf{T}_\perp \vec{u} = \mu^{-1} \overrightarrow{\text{rot}} \Phi$ . On vérifie aisément que pour tout  $\vec{u} \in \vec{V}_T(\mu; \Omega)$ ,  $\mathbf{T}_\perp \vec{u} \in \vec{V}_T(\mu; \Omega)$ . En effet

- ★  $\mu^{-1} \overrightarrow{\text{rot}} \Phi \in \vec{H}(\text{rot}; \Omega)$  par définition du problème satisfait ;
- ★ pour tout  $\Phi' \in H^1(\Omega)$ ,  $(\mu^{-1} \overrightarrow{\text{rot}} \Phi, \nabla \Phi')_{\Omega, \mu} = (\overrightarrow{\text{rot}} \Phi, \nabla \Phi')_\Omega = 0$  par les formules de Green 2D [65] ;

Ainsi  $\mathbf{T}_\perp$  est bien un isomorphisme de  $\vec{V}_T(\mu; \Omega)$  et pour tout  $\vec{u} \in \vec{V}_T(\mu; \Omega)$  nous avons

$$\begin{aligned} a_\perp(\vec{u}, \mathbf{T}_\perp \vec{u}) &= \int_\Omega \varepsilon^{-1} \text{rot } \vec{u} \overline{\text{rot } \mathbf{T}_\perp \vec{u}}, \\ &= \int_\Omega \varepsilon^{-1} \text{rot } \vec{u} \overline{\text{rot } \mu^{-1} \overrightarrow{\text{rot}} \Phi}, \\ &= \int_\Omega \varepsilon^{-1} \text{rot } \vec{u} \overline{\varepsilon \text{rot } \vec{u}}, \\ &= \|\vec{u}\|_{\vec{V}_T(\mu; \Omega)}^2. \end{aligned}$$

□

C'est ici un grand avantage de considérer un guide plasmonique composé d'un métal et d'un diélectrique. Si nous prenons un métamatériau à indice négatif,  $\mu$  change alors de signe et le résultat ci-dessus n'est plus valide : l'existence et l'unicité de  $\Phi$  est garantie avec la méthode de la T-coercivité sous certaines conditions sur le contraste  $\kappa_\mu := \mu_m / \mu_d$ .

**Remarque 5.6.** Comme  $\vec{V}_T(\mu; \Omega)$  s'injecte de façon compacte dans  $\vec{L}^2(\Omega)$ , il existe  $C > 0$  tel que  $\|\vec{u}\|_\Omega \leq C \|\text{rot } \vec{u}\|_\Omega$ , pour tout  $\vec{u} \in \vec{V}_T(\mu; \Omega)$ . On montre aussi facilement que  $a_\perp$  est T-coercive en considérant la norme canonique de  $\vec{V}_T(\mu; \Omega)$ .

### 5.2.3 Retour au cas Maxwell 2, 5D

Revenons à l'étude de la forme  $a(\cdot, \cdot) = a_z(\cdot, \cdot) + a_\perp(\cdot, \cdot)$ . Nous cherchons donc à construire un isomorphisme  $\mathbf{T}$  de  $\mathbf{V}_T(\beta; \mu; \Omega)$  et  $\mathbf{C}$  un opérateur compact tels que

$$\exists C > 0, C_0 \in \mathbb{R} \text{ tels que } \forall \mathbf{H} \in \mathbf{V}_T(\beta; \mu; \Omega), a(\mathbf{H}, \mathbf{TH}) \geq C \|\mathbf{H}\|_{\mathbf{V}_T(\beta; \mu; \Omega)}^2 - C_0 \|\mathbf{CH}\|_{\mathbf{V}_T(\beta; \mu; \Omega)}^2.$$

Ci-dessus  $\|\cdot\|_{\mathbf{V}_T(\beta; \mu; \Omega)}$  peut désigner la norme canonique  $(\cdot, \cdot)_{\mathbf{rot}_\beta}^{1/2}$  ou la norme  $(\mathbf{rot}_\beta \cdot, \mathbf{rot}_\beta \cdot)_\Omega^{1/2}$  sur  $\mathbf{V}_T(\beta; \mu; \Omega)$ . Maintenant que nous avons étudié séparément  $a_z$  et  $a_\perp$ , la première idée à tenter est de simplement combiner les opérateurs  $\mathbf{T}_z$  et  $\mathbf{T}_\perp$ , soit de considérer l'opérateur  $\mathbf{T}$  tel que

$$\mathbf{TH} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_\perp \vec{H}_\perp \\ \mathbf{T}_z H_z \end{pmatrix}, \quad \forall \mathbf{H} \in \mathbf{V}_T(\beta; \mu; \Omega).$$

Il faut vérifier que  $\mathbf{TH} \in \mathbf{V}_T(\beta; \mu; \Omega)$  pour être un opérateur admissible :

- ★  $\mathbf{TH} \in \mathbf{W}(\Omega)$  par définition ( $\mathbf{T}_\perp \vec{H}_\perp \in \vec{H}(\text{rot}; \Omega)$  et  $\mathbf{T}_z H_z \in H^1(\Omega)$ ) ;



★ pour tout  $\Psi \in H^1(\Omega)$ ,  $(\mathbf{TH}, \nabla_\beta \Psi)_{\Omega, \mu} = (\mathbb{T}_\perp \vec{H}, \nabla \Psi)_{\Omega, \mu} + (\mathbb{T}_z H_z, i\beta \Psi)_{\Omega, \mu} = (\mathbb{T}_z H_z, i\beta \Psi)_{\Omega, \mu} \neq 0$ ;

Le couplage des composantes du champ magnétique par la condition sur la divergence ne nous permet pas d'utiliser directement les résultats précédents. L'idée est donc de corriger cet opérateur pour que  $\mathbf{TH}$  soit à divergence nulle tout en conservant la propriété de T-coercivité. Comme pour tout  $\mathbf{H} \in \mathbf{V}_T(\beta; \mu; \Omega)$  nous avons  $\mathbf{TH} \in \mathbf{W}(\Omega)$ , grâce à la décomposition de  $\mathbf{W}(\Omega)$ , (voir remarque 5.3) on sait qu'il existe un unique  $\Psi \in H^1(\Omega)$  tel que  $\mathbf{TH} - \nabla_\beta \Psi \in \mathbf{V}_T(\beta; \mu; \Omega)$ . On redéfinit alors T comme

$$\mathbf{TH} = \begin{pmatrix} \mathbb{T}_\perp \vec{H}_\perp \\ \mathbb{T}_z H_z \end{pmatrix} - \nabla_\beta \Psi = \begin{pmatrix} \mu^{-1} \vec{\text{rot}} \Phi - \nabla \Psi \\ \mathbb{T}_z H_z - i\beta \Psi \end{pmatrix}, \quad \forall \mathbf{H} \in \mathbf{V}_T(\beta; \mu; \Omega). \quad (5.18)$$

Comme les potentiels  $\Psi, \Phi$  sont définis de façon unique, et que  $\mathbb{T}_z$  est un isomorphisme de  $H^1(\Omega)$ , nous avons bien construit un isomorphisme de  $\mathbf{V}_T(\beta; \mu; \Omega)$ . Remarquons que T est maintenant à valeurs complexes, et que  $\Psi = 0$  lorsque  $\beta = 0$  (voir (5.19)) : on retrouve le cas découplé. Nous pouvons maintenant démontrer la

**Proposition 5.6.** *Soit  $\kappa_\varepsilon \notin [-b_\Sigma; -1/b_\Sigma]$ , alors la forme a est faiblement T-coercive.*

**Preuve.** Il faut montrer en utilisant l'opérateur T défini ci-dessus que

$$\exists C > 0, C_0 \in \mathbb{R} \text{ tels que } \forall \mathbf{H} \in \mathbf{V}_T(\beta; \mu; \Omega), |a(\mathbf{H}, \mathbf{TH})| \geq C \|\mathbf{H}\|_{\mathbf{V}_T(\beta; \mu; \Omega)}^2 - C_0 \|\mathbf{CH}\|_{\mathbf{V}_T(\beta; \mu; \Omega)}^2,$$

et C un opérateur compact à déterminer. Pour  $\mathbf{H} \in \mathbf{V}_T(\beta; \mu; \Omega)$  nous avons

$$|a(\mathbf{H}, \mathbf{TH})| \geq \Re e(a_\perp(\vec{H}_\perp, \mathbb{T}_\perp \vec{H}_\perp)) + \Re e(a_z(H_z, \mathbb{T}_z H_z)) - \Re e(a(\mathbf{H}, \nabla_\beta \Psi)).$$

D'après ce qui précède, la forme  $a_\perp$  étant T-coercive, et pour  $\kappa_\varepsilon \notin I_c$  la forme  $a_z$  étant faiblement T-coercive, nous avons

$$|a(\mathbf{H}, \mathbf{TH})| \geq C \left( \|\text{rot } \vec{H}_\perp\|_\Omega^2 + \|H_z\|_{H^1(\Omega)}^2 \right) - C_0 \|\mathbf{CH}_z\|_{H^1(\Omega)}^2 - |a(\mathbf{H}, \nabla_\beta \Psi)|.$$

Ci-dessus et dans toute la suite,  $C > 0, C_0$  sont des constantes génériques (indépendantes de  $\beta$ ) pouvant varier d'une ligne à l'autre. Détaillons le dernier terme :

$$\begin{aligned} a(\mathbf{H}, \nabla_\beta \Psi) &= a_\perp(\vec{H}_\perp, \nabla \Psi) + a_z(H_z, i\beta \Psi), \\ &= a_z(H_z, i\beta \Psi), \\ &= -i\beta \int_\Omega \varepsilon^{-1} \nabla H_z \cdot \overline{\nabla \Psi}, \end{aligned}$$

d'où

$$|a(\mathbf{H}, \nabla_\beta \Psi)| \leq C_\beta \|\nabla H_z\|_\Omega \|\nabla \Psi\|_\Omega \leq C_\beta \|\nabla H_z\|_\Omega \|\nabla_\beta \Psi\|_\Omega,$$

avec  $C_\beta > 0$  une constante positive pouvant varier d'une ligne à l'autre. Or  $\Psi$  est solution de la formulation variationnelle

$$\begin{cases} \text{Trouver } \Psi \in H^1(\Omega) \text{ tel que } \forall \Psi' \in H^1(\Omega) \\ (\nabla_\beta \Psi, \nabla_\beta \Psi')_{\Omega, \mu} = (\mathbb{T}_z H_z, i\beta \Psi')_{\Omega, \mu}, \end{cases} \quad (5.19)$$

donc il existe  $C_\beta > 0$  tel que  $\|\nabla_\beta \Psi\|_\Omega \leq C_\beta \|\mathbb{T}_z H_z\|_\Omega$ . L'opérateur  $\mathbb{T}_z$  étant aussi un opérateur continu de  $L^2(\Omega)$  (voir section 2.4), on en déduit en utilisant l'inégalité de Young pour  $\eta > 0$

$$|a(\mathbf{H}, \nabla_\beta \Psi)| \leq C_\beta \|\nabla H_z\|_\Omega \|H_z\|_\Omega \leq C_\beta (\eta \|\nabla H_z\|_\Omega^2 + \eta^{-1} \|H_z\|_\Omega^2).$$

Il vient finalement

$$|a(\mathbf{H}, \mathbf{TH})| \geq C(\|\operatorname{rot} \vec{H}_\perp\|_\Omega^2 + \|\nabla H_z\|_\Omega^2) - C_0\|\mathbf{CH}_z\|_{H^1(\Omega)}^2 - C_\beta\eta\|\nabla H_z\|_\Omega^2 - C_\beta\eta^{-1}\|H_z\|_\Omega^2.$$

Comme on peut toujours choisir  $\eta > 0$  tel que  $C - C_\beta\eta > 0$ , on obtient

$$|a(\mathbf{H}, \mathbf{TH})| \geq C\|\mathbf{H}\|_{\mathbf{V}_T(\beta;\mu;\Omega)}^2 - C_\beta\|\mathbf{CH}\|_{\mathbf{V}_T(\beta;\mu;\Omega)}^2.$$

avec  $\mathbf{C}$  l'opérateur compact défini par  $(\mathbf{CH}, \mathbf{H}')_\Omega = \eta^{-1}(H_z, H'_z)_\Omega + (\mathbf{CH}_z, H'_z)_\Omega$ .  $\square$

Nous voyons que le caractère T-coercif de  $a_\perp + a_z$  est complètement lié à celui de  $a_z$ . En d'autres termes, comme pour l'étude des modes guidés d'un guide plasmonique scalaire, nous avons deux cas à distinguer :  $\kappa_\varepsilon \notin I_c$  pour lequel nous récupérerons un cadre classique, et  $\kappa_\varepsilon \in I_c$  (dont nous ne parlerons pas dans cette thèse). Nous pouvons maintenant établir le caractère auto-adjoint de l'opérateur  $A(\beta)$  (5.12) associé à (5.15).

### 5.3 Les modes guidés pour un contraste hors intervalle critique

Revenons à notre problème de valeurs propres, et étudions les propriétés de l'opérateur  $A(\beta)$  défini dans (5.12).

#### 5.3.1 Caractère auto-adjoint et résolvante compacte

Résumons ce que nous avons. Lorsque  $\kappa_\varepsilon \notin I_c$ , la forme  $a_\perp + a_z$  est faiblement T-coercive,  $c$  est une perturbation compacte, et la forme  $a_\perp + a_z + c$  est hermitienne. Soit  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , et soit  $\mathbf{F} \in \mathbf{L}_{\mu,\beta}^2(\Omega)$ . On considère le problème suivant :

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{H} \in \mathbf{V}_T(\beta; \mu; \Omega) \text{ tel que } \forall \mathbf{H}' \in \mathbf{V}_T(\beta; \mu; \Omega), \\ a_\lambda(\beta; \mathbf{H}, \mathbf{H}') := a_\perp(\vec{H}_\perp, \vec{H}'_\perp) + a_z(H_z, H'_z) + c(\beta; \mathbf{H}, \mathbf{H}') - \lambda(\mathbf{H}, \mathbf{H}')_{\Omega,\mu} = (\mathbf{F}, \mathbf{H}')_{\Omega,\mu}. \end{array} \right. \quad (5.20)$$

D'après ce qui précède le problème (5.20) relève de l'alternative de Fredholm, il ne nous reste plus qu'à montrer l'unicité de la solution pour conclure. Montrons que pour tout  $\mathbf{H} \in \mathbf{V}_T(\beta; \mu; \Omega)$  tel que  $a_\lambda(\beta; \mathbf{H}, \mathbf{H}) = 0$ , alors  $\mathbf{H} = 0$ . En effet, pour  $\mathbf{H} \in \mathbf{V}_T(\beta; \mu; \Omega)$ ,

$$a_\lambda(\beta; \mathbf{H}, \mathbf{H}) = 0 \implies \Im m(a_\lambda(\beta; \mathbf{H}, \mathbf{H})) = 0,$$

or comme  $\varepsilon, \mu, \beta$  sont à valeurs réelles et que  $a_\perp, a_z$  et  $c$  sont hermitiennes on obtient  $-\Im m(\lambda)\|\mathbf{H}\|_{\Omega,\mu}^2 = 0$ , donc  $\mathbf{H} = 0$ . On procède de même en remplaçant  $\lambda$  par  $\bar{\lambda}$  : comme (5.20) (avec  $\lambda$  ou  $\bar{\lambda}$ ) est bien posé dans  $\mathbf{V}_T(\beta; \mu; \Omega)$ , on en déduit que  $\mathcal{A}_\beta(\lambda) := A(\beta) - \lambda I_{L_{\mu,\beta}^2(\Omega)}$  et  $\mathcal{A}_\beta(\bar{\lambda})$  sont des isomorphismes, donc  $A(\beta)$  est auto-adjoint.

On montre par la même occasion que  $A(\beta)$  est à résolvante compacte. En effet, soit  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  et  $(\mathbf{F}_n)_n$  une suite bornée de  $\mathbf{L}_{\mu,\beta}^2(\Omega)$ . Pour tout  $\mathbf{F}_n$  il existe un unique  $\mathbf{H}_n \in D(A(\beta))$  tel que  $\mathbf{H}_n = B_\lambda \mathbf{F}_n$ , où  $B_\lambda := (\mathcal{A}_\beta(\lambda))^{-1}$ . Alors il existe  $C > 0$  telle que  $\|B_\lambda \mathbf{F}_n\|_{\mathbf{V}_T(\beta;\mu;\Omega)} \leq C\|\mathbf{F}_n\|_{\Omega,\mu}$ . Donc  $(B_\lambda \mathbf{F}_n)_n$  est bornée dans  $\mathbf{V}_T(\beta; \mu; \Omega)$ , on peut en extraire une sous-suite qui converge dans  $\mathbf{L}_{\mu,\beta}^2(\Omega)$ .

Ainsi nous avons montré la

**Proposition 5.7.** *Soit  $\kappa_\varepsilon \notin [-b_\Sigma; -1/b_\Sigma]$ . Alors  $A(\beta)$  défini dans (5.12) est auto-adjoint et à résolvante compacte.*

### 5.3.2 Caractérisation du spectre

Lorsque  $\kappa_\varepsilon \notin I_c$ , comme  $A(\beta)$  est auto-adjoint et à résolvante compacte, nous en déduisons que le spectre  $\sigma(A(\beta))$  de  $A(\beta)$  est réel discret et composé de valeurs propres de multiplicité finie. On peut montrer que le spectre est composé de deux suites de valeurs propres positives et négatives qui tendent vers plus et moins l'infini. Pour cela montrons que l'opérateur n'est pas borné inférieurement (on procède exactement comme pour [119, Lemme 2.23]). En effet, on construit deux suites  $(\mathbf{H}_n^\pm)_n$  de  $D(A(\beta))$  telle que

$$\|\mathbf{H}_n^\pm\|_{\Omega,\mu} = 1, \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (A(\beta)\mathbf{H}_n^\pm, \mathbf{H}_n^\pm)_{\Omega,\mu} = \pm\infty.$$

Nous construisons la suite  $(\mathbf{H}_n^-)_n$ , la suite  $(\mathbf{H}_n^+)_n$  se contruisant de la même façon. Considérons l'opérateur  $B_m$  non borné de  $\mathbf{L}_{\mu,\beta}^2(\Omega_m)$  défini par :

$$\left| \begin{array}{l} D(B_m) := \{\mathbf{F} \in \mathbf{V}_T(\beta; \mu; \Omega_m) \mid \mathbf{rot}_\beta \mathbf{rot}_\beta \mathbf{F} \in \mathbf{L}^2(\Omega), \mathbf{rot}_\beta \mathbf{F} \times \mathbf{n}_\Omega = 0 \text{ sur } \partial\Omega_m\} \\ B_m \mathbf{F} = \mathbf{rot}_\beta \mathbf{rot}_\beta \mathbf{F}. \end{array} \right.$$

On vérifie facilement que  $B_m$  est auto-adjoint et à résolvante compacte donc  $B_m$  admet une suite de valeurs propres  $\lambda_n$  qui tendent vers  $+\infty$ . Il existe donc une suite  $\mathbf{H}_n \in D(B_m)$  telle que  $\|\mathbf{H}_n\|_{\Omega_m} = 1$ , et  $(B_m \mathbf{H}_n, \mathbf{H}_n)_{\Omega_m} = \lambda_n$ . On définit maintenant la suite  $(\mathbf{H}_n^-)_n$  telle que

$$\mathbf{H}_n^- = \begin{cases} 0 & \text{dans } \Omega_d, \\ \mathbf{H}_n & \text{dans } \Omega_m. \end{cases}$$

Cette suite appartient bien à  $D(A(\beta))$  et

$$(A(\beta)\mathbf{H}_n^-, \mathbf{H}_n^-)_{\Omega,\mu} = a(\beta; \mathbf{H}_n^-, \mathbf{H}_n^-) = -|\varepsilon_m^{-1}|(B_m \mathbf{H}_n, \mathbf{H}_n)_{\Omega_m, \mu_m} = -|\varepsilon_m^{-1}| \mu_m \lambda_n,$$

d'où le résultat. Il suffit d'effectuer de même pour  $(\mathbf{H}_n^+)_n$  en échangeant les rôles de  $\Omega_m$  et  $\Omega_d$ .

**Proposition 5.8.** *Soit  $\beta \in \mathbb{R}$ ,  $\kappa_\varepsilon \notin I_c$ . Alors le spectre  $\sigma(A(\beta))$  consiste en deux suites valeurs propres, une positive et une négative, de multiplicité finie :*

$$\dots \leq \omega_{-n}^2(\beta) \leq \dots \leq \omega_{-1}^2(\beta) \leq 0 \leq \omega_1^2(\beta) \leq \dots \leq \omega_n^2(\beta) \leq \dots, \quad \text{avec} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \omega_{\pm n}^2(\beta) = \pm\infty.$$

Encore une fois, comme  $A(\beta)$  n'est pas borné inférieurement ou supérieurement, nous ne pouvons écrire de formule de Min-Max pour décrire les valeurs propres. Il est cependant possible d'écrire une formule de Min-Max sur l'opérateur inverse  $B_t$ , avec  $t \in \mathbb{R}^* \setminus \sigma(A(\beta))$ . Notons aussi que les valeurs propres négatives correspondent à des fréquences  $\omega_{-n}(\beta) \in i\mathbb{R}$ , ce qui correspond dans le guide à des modes évanescents en temps. Les modes guidés sont donc donnés par les valeurs propres positives  $\omega_n^2(\beta)$ ,  $n \geq 1$ .

Nous terminons cette section en commentant le problème de valeurs propres non linéaire (5.8) que l'on rappelle :

$$\left| \begin{array}{l} \text{Pour } \beta \in \mathbb{R}, \text{ trouver } (\mathbf{H}, \omega^2) \in \mathbf{W}(\Omega) \setminus \{0\} \times \mathbb{C} \text{ tels que :} \\ \mathbf{rot}_\beta(\varepsilon^{-1}(\omega) \mathbf{rot}_\beta \mathbf{H}) = \omega^2 \mu \mathbf{H} \quad \text{dans } \Omega. \\ \varepsilon^{-1}(\omega) \mathbf{rot}_\beta \mathbf{H} \times \mathbf{n}_\Omega = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

On rappelle que  $\varepsilon(\omega)$  est tel que

$$\varepsilon(\omega) = \begin{cases} \varepsilon_d & \text{dans } \Omega_d, \\ 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} & \text{dans } \Omega_m. \end{cases}$$

Si l'on fixe  $\omega$ , nous avons vu précédemment que l'ensemble des valeurs propres du problème linéarisé était

$$\sigma(A(\beta)) = \{\omega_{\pm n}^2(\beta), n \geq 1\}.$$

La question est donc de trouver s'il existe des valeurs propres de  $\sigma(A(\beta))$  valant  $\omega^2$ , soit les solutions de  $\omega_{\pm n}^2(\beta) = \omega^2$ .

Comme au chapitre 4, on peut d'ores et déjà éliminer toutes les valeurs propres  $\omega_{-n}^2(\beta)$ . En effet, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\omega_{-n}^2(\beta) < 0$  donc

$$\varepsilon_m(\omega_{-n}(\beta)) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_{-n}^2(\beta)} > 0,$$

la forme bilinéaire associée à (5.8) est alors coercive et en conséquence toutes les valeurs propres sont strictement positives. Ainsi nous en déduisons que les valeurs propres de (5.8) sont toutes positives.

## 5.4 Quelques remarques

Nous nous arrêtons là faute de temps dans l'étude des modes plasmoniques en Maxwell. Il y a encore plusieurs choses à faire, et nous en dressons une liste (non exhaustive) dans cette partie.

★ Les questions de discrétisation pour un contraste hors intervalle critique.

On souhaite désormais approcher les valeurs propres de l'opérateur  $A(\beta)$  pour  $\kappa_\varepsilon \notin I_c$ . Comme  $A(\beta)$  est à résolvante compacte il suffirait de suivre la démarche de [110, 4, 57] (utilisée dans le chapitre 4), en approchant les valeurs propres de  $B_t$  (qui est compact, et auto-adjoint pour  $t \in \mathbb{R}^* \setminus \sigma(A(\beta))$ ), avec cette fois non pas des méthodes d'approximation éléments finis de Lagrange mais avec des éléments d'arêtes.

Si nous avons pris en compte les conditions sur la divergence dans la formulation variationnelle [11, 7, 119] alors nous pourrions utiliser les éléments finis de Lagrange pour discrétiser la formulation régularisée.

Dans notre cas, nous avons besoin d'une part d'établir que la famille d'opérateurs discrets  $(B_t^h)_h$  est bien définie dans les espaces éléments d'arêtes, d'autre part de s'assurer de la convergence en norme de la suite  $(B_t^h)_h$  vers  $B_t$  quand  $h$  (le pas de maillage) tend vers 0. Nous avons vu dans le chapitre 2 qu'une manière de s'en assurer est d'une part de vérifier que la forme discrète est (faiblement) T-coercive, et d'autre part que les maillages soient (localement) T-conformes. Pour la discrétisation par éléments finis d'arêtes, la grande difficulté réside dans la conservation de la décomposition orthogonale des champs avec les potentiels [21, 46], et le changement de signe de  $\varepsilon$  rend le travail plus technique.

Expliquons brièvement (de façon très formelle). Dans notre cas, on discrétise par exemple  $\vec{H}_\perp$  avec des éléments finis d'arête d'ordre 1, et  $H_z$  avec des éléments finis de Lagrange P1. S'assurer d'abord que  $B_t^h$  peut être défini nécessite d'assurer la T-coercivité au niveau discret. Construisons donc  $\mathbf{T}_h$  la discrétisation de (5.18). On peut évidemment approcher le potentiel  $\vec{A} := \mu^{-1} \vec{\text{rot}} \Phi$  par  $\vec{A}_h$  en utilisant des éléments d'arêtes et  $\Psi$  par  $\Psi_h$  défini sur des espaces éléments finis de Lagrange P1 ( $\nabla \Psi$  est alors approché par  $\nabla \Psi_h$  dans les espaces éléments finis d'arête). On définit  $\mathbf{T}_h$  tel que

$$\mathbf{T}_h \mathbf{H} = \begin{pmatrix} \vec{A}_h + \nabla \Psi_h \\ \mathbf{T}_{z,h} H_z + i\beta \Psi_h \end{pmatrix}, \quad \forall \mathbf{H} \in \mathbf{V}_T(\beta; \mu; \Omega),$$

avec  $\mathbf{T}_{z,h}$  l'opérateur discret associé à  $\mathbf{T}_z$  (voir chapitre 2). La difficulté vient du fait que, au niveau discret,  $\mathbf{T}_h \mathbf{H}$  ne vérifie que faiblement les conditions sur la divergence, ce qui parasite les solutions du problème de valeurs propres (l'orthogonalité de  $\mathbf{L}_{\mu,\beta}^2(\Omega)$  avec les gradients n'est pas totalement assurée

donc 0 est valeur propre de grande multiplicité). Cependant lorsque  $h$  tend vers 0 l'erreur commise est contrôlée et devient "suffisamment" petite [100, 51]. Cependant, il faudrait rigoureusement écrire toutes les étapes pour s'en convaincre.

★ Cas d'un contraste dans l'intervalle critique.

Lorsque  $\kappa_\varepsilon \in I_c \setminus \{-1\}$ , la forme  $a_z$  n'est plus T-coercive à cause de l'apparition de singularités aux coins de l'interface [15, 38]. Nous avons vu au chapitre 4 que pour calculer les modes guidés, il faut étendre l'opérateur pour prendre en compte ces singularités. Dans le cas du guide plasmonique magnétique, pour procéder de façon similaire il nous faut d'abord caractériser ces singularités. Qu'avons-nous fait précédemment ? Nous avons "zoomé" près d'un coin, réécrit les équations en coordonnées polaires  $(r, \theta)$  (centrées au coin), et suffisamment près du coin nous avons négligé les termes (compacts) pour chercher des solutions à variables séparées. Seulement ici, à cause de la condition sur la divergence ( $\operatorname{div}(\mu \vec{H}_\perp) = -i\beta\mu H_z$  dans  $\Omega$ ), les singularités ne peuvent être portées seulement par  $H_z$ . Il y a ici encore beaucoup de choses à explorer pour pouvoir retrouver une formulation adaptée pour le problème de valeurs propres et un bon cadre fonctionnel qui prendra en compte ces singularités. Une idée serait, puisque le caractère Fredholm peut être perdu à cause de la forme bilinéaire liée à la composante longitudinale, de chercher des singularités de la forme  $(\vec{H}_\perp, s)^t$ , avec  $s$  les singularités du problème scalaire  $s(r, \theta) = r^{\pm i\eta}\Phi(\theta)$ ,  $\eta > 0$  et  $\vec{H}_\perp$  cherché comme solution d'un problème dont le second membre dépendrait de  $s$ . Si l'on suppose que l'interface ne possède qu'un seul coin, et que l'on réécrit le problème en coordonnées polaires  $(r, \theta)$  dans un voisinage  $D_\rho$  du coin, puis que l'on effectue le changement de variables  $(r, \theta) \rightarrow (\zeta := \ln r, \theta)$ , les formes bilinéaires deviennent pour  $\mathbf{H} := (\vec{H}_\perp, H_z)^t = (H_\zeta, H_\theta, H_z)^t$  :

$$\begin{aligned} a_z(H_z, H'_z) &:= \int_{S_\rho} \varepsilon^{-1} \nabla H_z \cdot \overline{\nabla H'_z} d\zeta d\theta, \\ a_\perp(\vec{H}_\perp, \vec{H}'_\perp) &:= \int_{S_\rho} \varepsilon^{-1} \operatorname{rot} \vec{H}_\perp \overline{\operatorname{rot} \vec{H}'_\perp} d\zeta d\theta + \int_{S_\rho} \varepsilon^{-1} \left( \operatorname{rot} \vec{H}_\perp \overline{H'_\theta} + H_\theta \overline{\operatorname{rot} \vec{H}'_\perp} \right) d\zeta d\theta \\ &+ \int_{S_\rho} \varepsilon^{-1} H_\theta \overline{H'_\theta} d\zeta d\theta, \\ c(\beta; \mathbf{H}, \mathbf{H}) &:= -i\beta \int_{S_\rho} \varepsilon^{-1} (H_\theta \overline{\partial_\theta H'_z} + H_\zeta \overline{\partial_\zeta H'_z}) e^\zeta d\zeta d\theta + i\beta \int_{S_\rho} \varepsilon^{-1} (\partial_\theta H_z \overline{H'_\theta} + \partial_\zeta H_z \overline{H'_\zeta}) e^\zeta d\zeta d\theta \\ &+ \beta^2 \int_{S_\rho} \varepsilon^{-1} \vec{H}_\perp \cdot \overline{\vec{H}'_\perp} e^{2\zeta} d\zeta d\theta, \end{aligned}$$

où  $S_\rho$  est la bande semi-infinie  $S_\rho := ]-\infty; \ln \rho[ \times ]-\pi; \pi[$ . La forme  $a_z$  reste inchangée donc cela semble être une piste intéressante à explorer. Maintenant il faut déterminer le champ transverse associé. Nous pourrions aussi nous inspirer de [53, 52, 49] dans lesquels les singularités pour les équations de Maxwell ont été étudiées.

★ Les guides plasmoniques diélectrique-métamatériau à indice négatif.

Lorsque  $\varepsilon$  et  $\mu$  changent de signe, l'opérateur associé au problème de valeurs propres est non auto-adjoint, même lorsque  $\kappa_\varepsilon \notin I_c$  et puisque nous perdons le produit scalaire pondéré par  $\mu$  la démarche suivie dans [116] ne fonctionne plus. L'existence et l'unicité des potentiels  $\Phi$ ,  $\Psi$ , ainsi que le résultat de compacité de l'injection de  $\mathbf{V}_T(\beta; \mu; \Omega)$  dans  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  sont valables si et seulement si le contraste  $\kappa_\mu = \mu_m/\mu_d$  n'appartient pas à un intervalle critique, le même intervalle critique  $I_c$  que précédemment.

Nous renvoyons à [39] pour les résultats de compacité, et à [16, 17] pour les résultats de T-coercivité pour les problèmes Maxwell 2D et 3D. Ce cas relève donc d'une sérieuse difficulté supplémentaire.

★Les modes électriques du guide plasmonique.

Quelles différences aurions-nous si nous avions choisi d'étudier les modes du guide plasmonique à l'aide des équations en champ électrique ? On considère pour cela le problème linéarisé (en  $\omega$ ) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{E}, \omega^2) \in \mathbf{W}(\Omega) \setminus \{0\} \times \mathbb{C} \text{ tels que :} \\ \mathbf{rot}_\beta \mu^{-1} \mathbf{rot}_\beta \mathbf{E} = \omega^2 \varepsilon \mathbf{E} \quad \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{E} \times \mathbf{n}_\Omega = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{array} \right. \quad (5.21)$$

Si l'on souhaite étudier les modes guidés du champ électrique (5.21), on ne peut plus définir de produit scalaire à droite à cause du changement de signe  $\varepsilon$ , et la démarche suivie dans [116] ne fonctionne plus. Cependant la partie principale (avec les dérivées d'ordre 2) ne pose plus de difficultés. Grâce aux résultats de compacité des espaces classiques garantis sous certaines conditions sur  $\varepsilon$  [39], on pourrait procéder classiquement à l'étude du guide électrique à l'aide la forme régularisée qui prend en compte la divergence [11, 119]. Mais ceci est une autre histoire...

# BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. Anantha Ramakrishna, *Physics of negative refractive index materials*, Rep. Prog. Phys., **68** (2005), pp. 449–521.
- [2] A. Aubry, D.Y. Lei, A.I. Fernandez-Dominguez, Y. Sonnefraud, S.A. Maier, J.B. Pendry, *Plasmonic light-harvesting devices over the whole visible spectrum*, Nano letters, **10** (2010), pp. 2574–2579.
- [3] A. Aubry, D.Y. Lei, S.A. Maier, J.B. Pendry, *Interaction between plasmonic nanoparticles revisited with transformation optics*, Phys. Rev. Lett., **105** (2010).
- [4] I. Babuska, J. Osborn, *Eigenvalue Problems*, Handbook of numerical analysis Vol.II, P.G. Ciarlet and J.L. Lions Editors, North-Holland, 1991.
- [5] W.L. Barnes, A. Dereux, T.W. Ebbesen, *Surface plasmon subwavelength optics*, Nature, **424** (2003), pp. 824–830.
- [6] É. Bécache, A.-S. Bonnet-Ben Dhia, G.Legendre, *Perfectly matched layers for the convected Helmholtz equation*, SIAM J. Numer. Anal., **1** (2004), pp. 409–433.
- [7] A. Bermúdez, D.G. Pedreira, *Mathematical analysis of a finite element method without spurious solutions for computation of dielectric waveguides*, Numerische Mathematik, **1** (1992), pp. 39–57.
- [8] M.V. Berry, *Hermitian boundary conditions at a Dirichlet singularity: the Marletta–Rozenblum model*, J. Phys. A Math. Theor., **42** (2009), 165208.
- [9] D. Boffi, F. Brezzi, L. Gastaldi, *On the problem of spurious eigenvalues in the approximation of linear elliptic problems in mixed form*, Mathematics of Computation of the American Mathematical Society, **229** (2000), pp. 121–140.
- [10] A. Boltasseva, V.S. Volkov, R.B. Nielsen, E. Moreno, S.G. Rodrigo, S.I. Bozhevolnyi, *Triangular metal wedges for subwavelength plasmon-polariton guiding at telecom wavelengths*, Opt. Express, **16** (2008), pp. 5252–5260.
- [11] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, *Analyse mathématique de la propagation de modes guidés dans les fibres optiques*, Thèse de Doctorat, Université Paris VI, 1988.
- [12] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, C. Carvalho, L. Chesnel, P. Ciarlet Jr., *On the use of Perfectly Matched Layers at corners for scattering problems with sign-changing coefficients*, soumis, 2015.
- [13] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, C. Carvalho, P. Ciarlet Jr., *Mesh requirements for finite element approximation of problems with sign-changing coefficients*, en cours de finalisation, 2015.
- [14] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, L. Chesnel, *Strongly oscillating singularities for the interior transmission eigenvalue problem*, Inv. Probl., **29** (2013).

- [15] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, L. Chesnel, P. Ciarlet Jr., *T-coercivity for scalar interface problems between dielectrics and metamaterials*, Math. Mod. Num. Anal., **46** (2012), pp. 1363–1387.
- [16] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, L. Chesnel, P. Ciarlet Jr., *Two-dimensional Maxwell's equations with sign-changing coefficients*, Appl. Num. Math., **79** (2014), pp. 29–41.
- [17] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, L. Chesnel, P. Ciarlet Jr., *T-coercivity for the Maxwell problem with sign-changing coefficients*, Commun. in PDEs, **39** (2014), pp. 1007–1031.
- [18] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, L. Chesnel, X. Claeys, *Radiation condition for a non-smooth interface between a dielectric and a metamaterial*, Math. Model. Meth. App. Sci., **23** (2013), pp. 1629–1662.
- [19] A.S. Bonnet-Ben Dhia, L. Chesnel, H. Haddar, *On the use of T-coercivity to study the Interior Transmission Eigenvalue Problem*, C. R. Acad. Sci., Ser. I, **340** (2011), pp. 647–651.
- [20] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, P. Ciarlet Jr., C.M. Zwölf, *Two-and three-field formulations for wave transmission between media with opposite sign dielectric constants*, J. of Comput. and Appl. Math. **204** (2007), pp. 408–417.
- [21] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, P. Ciarlet Jr., C.M. Zwölf, *A new compactness result for electromagnetic waves. Application to the transmission problem between dielectrics and metamaterials*, Math. Models Meth. App. Sci., **18** (2008), pp. 1605–1631.
- [22] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, P. Ciarlet Jr., C.M. Zwölf, *Time harmonic wave diffraction problems in materials with sign-shifting coefficients*, J. Comput. Appl. Math., **234** (2010), pp. 1912–1919, Corrigendum p. 2616.
- [23] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, G. Dakhia, C. Hazard, L. Chorfi, *Diffraction by a defect in an open waveguide: a mathematical analysis based on a modal radiation condition*, SIAM J. Appl. Math, **70** (2009), pp. 677–693.
- [24] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, M. Dauge, K. Ramdani, *Analyse spectrale et singularités d'un problème de transmission non coercif*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, **328** (1999), pp. 717–720.
- [25] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, B. Goursaud, C. Hazard, *Mathematical analysis of the junction of two acoustic open waveguides*, SIAM J. Appl. Math, **71** (2011), pp. 2048–2071.
- [26] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, P. Joly, *Mathematical analysis and numerical approximation of optical waveguides*, Mathematical modeling in optical science, pp. 273–324, 2001.
- [27] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, K. Ramdani, *Mathematical analysis of conducting and superconducting transmission lines*, SIAM Journal on Applied Mathematics, **6** (2000), pp. 2087–2113.
- [28] T.Z. Boulmezaoud, *Inverted finite elements: a new method for solving elliptic problems in unbounded domains*, ESAIM: Math. Mod. Num. Anal., **1** (2005), pp. 109–145.
- [29] J.-P. Bérenger, *An effective PML for the absorption of evanescent waves in waveguides*, IEEE Microw. Guided Wave Lett., 1998.
- [30] S.C. Brenner, J. Gedicke, L.-Y. Sung., *Hodge decomposition for two-dimensional time-harmonic Maxwell's equations: impedance boundary condition*, Math. Meth. Appl. Sci., 2015.
- [31] H. Brezis, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Universitext, Springer, New York, 2011.
- [32] Y. Brulé, G. Demésy, B. Gralak, *Numerical modal analysis in dispersive and dissipative plasmonic structures*, proceeding conférence META, 2015.
- [33] F. Cakoni, D. Colton, *Qualitative methods in inverse scattering theory. An introduction*, Springer-Verlag, Interaction of Mechanics and Mathematics, Berlin, 2006.



- [34] S. Caorsi, P. Fernandez, M. Raffetto, *On the convergence of Galerkin finite element approximations of electromagnetic eigenproblems*, SIAM J. Numer. Anal., **38** (2000), pp. 580–607.
- [35] M. Cassier, *Étude de deux problèmes de propagation d'ondes transitoires : 1) Focalisation spatio-temporelle en acoustique; 2) Transmission entre un diélectrique et un métamatériau*, Thèse de Doctorat, École Polytechnique, 2014.
- [36] A. Castanié, *Surface plasmon hybridization in the strong coupling regime in gain structures*, Thèse de Doctorat, Université de Montpellier II, 2013.
- [37] R. Charbonneau, N. Lahoud, G. Mattiussi, P. Berini, *Demonstration of integrated optics elements based on long-ranging surface plasmon polaritons.*, Optics Express, **13** (2005), pp. 977–984.
- [38] L. Chesnel, *Etude de quelques problèmes de transmission avec changement de signe. Application aux métamatériaux.*, Thèse de Doctorat, École Polytechnique, 2012.
- [39] L. Chesnel, P. Ciarlet Jr., *Compact imbeddings in electromagnetism with interfaces between classical materials and metamaterials*, SIAM J. Math. Anal., **43** (2011), pp. 2150–2169.
- [40] L. Chesnel, P. Ciarlet Jr., *T-coercivity and continuous Galerkin methods: application to transmission problems with sign changing coefficients*, Numer. Math., **124** (2013), pp. 1–29.
- [41] L. Chesnel, X. Claeys, S.A. Nazarov, *A curious instability phenomenon for a rounded corner in presence of a negative material*, Asympt. Anal., **88** (2014), pp. 43–74.
- [42] L. Chesnel, X. Claeys, S.A. Nazarov, *Spectrum of a diffusion operator with coefficient changing sign over a small inclusion*, arXiv:1401.2146, 2015.
- [43] E.T. Chung, P. Ciarlet Jr., *A staggered discontinuous Galerkin method for wave propagation in media with dielectrics and meta-materials*, J. Comput. Appl. Math., **239** (2013), pp. 189–207.
- [44] P.G. Ciarlet, *Mathematical Elasticity, Vol. III : Theory of Shells*, North-Holland, Amsterdam, 2000.
- [45] P.G. Ciarlet, *The finite element method for elliptic problems*, SIAM, Philadelphia, 2002.
- [46] P. Ciarlet Jr., *T-coercivity: application to the discretization of Helmholtz-like problems*, Math. Mod. Num. Anal., **46** (2012), pp. 1363–1387.
- [47] P. Ciarlet Jr., B. Jung, S. Kaddouri, S. Labrunie, J. Zou, *The Fourier singular complement method for the Poisson problem. Part I: Prismatic domains*, Numer. Math., **101** (2005), pp. 423–450.
- [48] P. Ciarlet Jr., B. Jung, S. Kaddouri, S. Labrunie, J. Zou, *The Fourier Singular Complement Method for the Poisson problem. Part II: axisymmetric domains*, Numer. Math., **102** (2006), pp. 583–610.
- [49] P. Ciarlet Jr., F. Lefèvre, S. Lohrengel, S. Nicaise, *Weighted regularization for composite materials in electromagnetism*, ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis, **1** (2010), pp. 75–108.
- [50] P. Ciarlet Jr., M. Vohralik, *Robust a posteriori error control for transmission problems with sign-changing coefficients using localization of dual norms*, hal-01148476, 2015.
- [51] P. Ciarlet Jr., H. Wu, J. Zou, *Edge element methods for Maxwell's equations with strong convergence for Gauss' laws*, SIAM Journal on Numerical Analysis, **52** (2014), pp. 779–807.
- [52] M. Costabel, M. Dauge, *Singularities of electromagnetic fields in polyhedral domains*, Arch. Rational Mech. Anal., **151** (2000), pp. 221–276.
- [53] M. Costabel, M. Dauge, S. Nicaise, *Singularities of Maxwell interface problems*, Math. Mod. Num. Anal., **33** (1999), pp. 627–649.

- [54] M. Costabel, E. Stephan, *A direct boundary integral method for transmission problems*, J. of Math. Anal. and Appl., **106** (1985), pp. 367–413.
- [55] M. Dauge, *Elliptic boundary value problems on corner domains*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [56] M. Dauge, B. Texier, *Problèmes de transmission non coercifs dans des polygones*, Université de Rennes 1, Institut de Recherche Mathématique de Rennes, 1997.
- [57] L. Demkowicz, P. Monk; *Discrete compactness and the approximation of Maxwell's equations in  $\mathbb{R}^3$* , Mathematics of computation, **234** (2001), pp. 507–523.
- [58] D. Edward, I. Palik, *Handbook of optical constants of solids*, Academic Press Inc. Londres, 1985.
- [59] C. Engström, *Spectral approximation of quadratic operator polynomials arising in photonic band structure calculations*, Numerische Mathematik, **126** (2014), pp. 413–440.
- [60] D.E. Edmunds, W.D. Evans, *Spectral theory and differential operators*, Oxford Science Publications, Oxford, 1987.
- [61] A. Ern, J.-L. Guermond, *Theory and practice of finite elements*, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [62] P. Fernandes, M. Raffetto, *Well-posedness and finite element approximability of time-harmonic electromagnetic boundary value problems involving bianisotropic materials and metamaterials*, Math. Models Meth. App. Sci., **19** (2009), pp. 2299–2335.
- [63] A.I. Fernandez-Dominguez, A. Weiner, F.J. Garcia-Vidal, S.A. Maier, J.B. Pendry, *Transformation-optics description of nonlocal effects in plasmonic nanostructures*, Phys. Rev. Lett., **108** (2012).
- [64] J. Fleckinger, M.L. Lapidus, *Eigenvalues of elliptic boundary value problems with an indefinite weight function*, Transactions of the American Mathematical Society 295, **1** (1986), pp. 305–324.
- [65] V. Girault, P.-A. Raviart, *Finite element methods for Navier-Stokes equations*, Springer Series in Computational Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [66] B. Goursaud, *Étude mathématique et numérique de guides d'ondes ouverts non uniformes, par approche modale*, Thèse de Doctorat, École Polytechnique, 2010.
- [67] B. Gralak, D. Maystre, *Negative index materials and time-harmonic electromagnetic field*, C.R. Physique, **8** (2012) pp. 786–799.
- [68] B. Gralak, A. Tip, *Macroscopic Maxwell's equations and negative index materials*, J. Math. Phys., **51**(2010).
- [69] D.K. Gramotnev, S.I. Bozhevolnyi, *Plasmonics beyond the diffraction limit*, Nature Photonics, **4** (2010), pp. 83–91.
- [70] D. Grieser, *The plasmonic eigenvalue problem*, Review in Mathematical Physics, **26** (2014).
- [71] P. Grisvard, *Singularities in boundary value problems*, Masson, Paris, 1992.
- [72] M. Halla, L. Nannen, *Hardy space infinite elements for time-harmonic two-dimensional elastic waveguide problems.*, arXiv:1506.04781v1, 2015.
- [73] J. Helsing, R.C. McPhedran, G.W. Milton, *Spectral super-resolution in metamaterial composites*, New J. Phys. **13**, **1** (2011).
- [74] K.R. Hiremath, L. Zschiedrich, F. Schmidt, *Numerical solution of nonlocal hydrodynamic Drude model for arbitrary shaped nano-plasmonic structures using Nédélec finite elements*, Journal of Computational Physics, **17** (2012): pp. 5890–5896.
- [75] T. Hohage, L. Nannen, *Convergence of infinite element methods for scalar waveguide problems*, BIT Numerical Mathematics **55** (2015), pp. 215–254.

- [76] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators. I: Distribution Theory and Fourier Analysis*, Reprint of the 2nd edition 1990, Springer, Berlin, 2003.
- [77] J.D. Jackson, *Classical electrodynamics*, John Wiley & Sons, Inc, New York, Third edition, 1999.
- [78] P.B. Johnson, R.W. Christy, *Optical constants of the noble metals*, Phys. Rev. B, **6** (1972), pp. 4370–4379.
- [79] P. Joly, C. Poirier, J.E. Roberts, P. Trounev, *A New Nonconforming Finite Element Method for the Computation of Electromagnetic Guided Waves. I: Mathematical Analysis*, SIAM journal on numerical analysis, **4** (1996), pp. 1494–1525.
- [80] V. Kalvin, *Perfectly matched layers for diffraction gratings in inhomogeneous media. Stability and error estimates*, SIAM Journal on Numerical Analysis, **49** (2011), pp. 309–330.
- [81] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- [82] A.V. Krasavin, A.V. Zayats, *Silicon-based plasmonic waveguides*, Opt. Express, **18** (2010), pp. 11791–11799.
- [83] H. Kettunen, H. Wallén, A. Sihvola, *Electrostatic response of a half-disk*, J. Electrostatics, **67** (2009), pp. 890–897.
- [84] V.A. Kozlov, V.G. Maz’ya, J. Rossmann, *Elliptic boundary value problems in domains with point singularities*, AMS Mathematical Surveys and Monographs, **52** (1997).
- [85] V.A. Kozlov, V.G. Maz’ya, J. Rossmann, *Spectral problems associated with corner singularities of solutions to elliptic equations*, AMS Mathematical Surveys and Monographs, **85** (2001).
- [86] V.A. Kondrat’ev, *Boundary-value problems for elliptic equations in domains with conical or angular points*, Trans. Moscow Math. Soc., **16** (1967), pp. 227–313.
- [87] V.V. Krylov, *New type of vibration dampers utilising the effect of acoustic “black holes”*, Acta Acustica united with Acustica, **90** (2004), pp. 830–837.
- [88] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *Statistical Physics Part I*, Butterworth-Heinemann, Oxford, third edition, 1980.
- [89] A. Lechleiter, D.-L. Nguyen, *Volume integral equations for scattering from anisotropic diffraction gratings*, Math. Methods Appl. Sci., **36** (2013), pp. 262–274.
- [90] M. Levitin, E. Shargorodsky, *Spectral pollution and second-order relative spectra for self-adjoint operators*, IMA journal of numerical analysis, **3** (2004), pp. 393–416.
- [91] L. Li, *Hypersingularity, electromagnetic edge condition, and an analytic hyperbolic wedge model*, J. Opt. Soc. Am. A, **31** (2014), pp. 808–817.
- [92] Y. Luo, J.B. Pendry, A. Aubry, *Surface plasmons and singularities*, Nano Lett., **10** (2010), pp. 4186–4191.
- [93] Y. Luo, A.I. Fernandez-Dominguez, A. Wiener, S.A. Maier, J.B. Pendry, *Surface plasmons and nonlocality: A simple model*, Physical review letters, **111** (2013).
- [94] W. McLean, *Strongly elliptic systems and boundary integral equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [95] J. M. McMahon, S.K. Gray, G. C. Schatz, *Calculating nonlocal optical properties of structures with arbitrary shape*, Physical Review B, **82**, **3** (2010): 035423.
- [96] S.A. Maier, *Plasmonics : fundamentals and applications*, Springer, 2007.
- [97] V. Mehrmann, H. Voss, *Nonlinear eigenvalue problems: a challenge for modern eigenvalue methods*, GAMM-Mitteilungen, **27** (2004), pp. 121–152.

- [98] J. Meixner, *The behavior of electromagnetic fields at edges*, IEEE Trans. Antennas and Propagat., **40** (1972), pp. 442–446.
- [99] G.W. Milton, *The theory of composites*, Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics, 2002.
- [100] P. Monk, *Finite element methods for Maxwell's equations*, Numerical Mathematics and Scientific Computation, Oxford University Press, New York, 2003.
- [101] A. Moreau, C. Ciraci, D. R. Smith, *Impact of nonlocal response on metallodielectric multilayers and optical patch antennas*, Physical Review B **87**, **4** (2013): 045401.
- [102] S.A. Nazarov, J. Taskinen, *On essential and continuous spectra of the linearized water-wave problem in a finite pond*, Mathematica Scandinavica, **1** (2010), pp. 141–160.
- [103] H.-M. Nguyen, *Limiting absorption principle and well-posedness for the Helmholtz equation with sign changing coefficients*, arXiv preprint arXiv:1507.01730, 2015.
- [104] X. Ni, Z. J. Wong, M. Mrejen, Y. Wang, X. Zhang, *An ultrathin invisibility skin cloak for visible light*, Science, **6254** (2015), pp. 1310–1314.
- [105] S. Nicaise, J. Venel, *A posteriori error estimates for a finite element approximation of transmission problems with sign changing coefficients*, J. Comput. Appl. Math., **235** (2011), pp. 4272–4282.
- [106] H.M. Nussenzveig, *Causality and dispersion relation*, Academic press, London, 1972.
- [107] D. O'Connor, M. McCurry, B. Lafferty, A.V. Zayats, *Plasmonic waveguide as an efficient transducer for high-density data storage*, Appl. Phys. Lett., **95** (2009).
- [108] P. Ola, *Remarks on a transmission problem*, J. Math. Anal. Appl., **196** (1995), pp. 639–658.
- [109] G. Oliveri, M. Raffetto, *A warning about metamaterials for users of frequency-domain numerical simulators*, Antennas and Propagation, IEEE Transactions on, **56** (2008), pp. 792–798.
- [110] J.E. Osborn, *Spectral approximation for compact operators*, Math. Comp., **29** (1975), pp. 712–725.
- [111] R.F. Oulton, V.J. Sorger, D.A. Genov, D.F.P. Pile, X. Zhang, *A hybrid plasmonic waveguide for subwavelength confinement and long-range propagation*, Nature Photonics, **2** (2008), pp. 496–500.
- [112] M. Paggi, *Singular, hypersingular and singular free electromagnetic fields at wedge tips in metamaterials*, Inter. Jour. Sol. Struc., **47** (2010); pp. 2062–2069.
- [113] J. Peetre, *Another approach to elliptic boundary problems*, Commun. Pure Appl. Math., **14** (1961), pp. 711–731.
- [114] J.B. Pendry, *Negative refraction makes a perfect lens*, Physical Review Letters, **85** (2000), pp. 3966–3969.
- [115] J.B. Pendry, A. Aubry, D.R. Smith, S.A. Maier, *Transformation optics and subwavelength control of light*, Science, American Association for the Advancement of Science, **337** (2012), pp. 549–552.
- [116] C. Poirier, *Guides d'ondes électromagnétiques : analyse mathématiques et numérique*, Thèse de Doctorat, Université de Nantes, 1994.
- [117] B. Prade, J.Y. Vinet, M. Mysyrowicz, *Guided optical waves in planar heterostructures with negative dielectric constant*, Phys. Rev. B, **44** (1991), pp. 13556–13572.
- [118] H. Raether, *Excitation of plasmons and interband transitions by electrons*, Springer Berlin Heidelberg, 1980.
- [119] K. Ramdani, *Lignes supraconductrices : analyse mathématique et numérique.*, Thèse de Doctorat, Université Paris VI, 1999.

- [120] A.H. Schatz, *An observation concerning Ritz-Galerkin methods with indefinite bilinear forms*, Math. Comp., **28** (1974), pp. 959–962.
- [121] E. Séré, M. Lewin, *Spectral pollution and how to avoid it (with applications to Dirac and periodic Schrödinger operators)*, Proc. London Math. Soc., **100** (2010), pp. 864–900.
- [122] V.P. Shestopalov, Y.V. Shestopalov, *Spectral Theory and Excitation of Open Structures*, The Institution of Electrical Engineers, Londres, 1996.
- [123] G. Shvets, I. Tsukerman, *Plasmonics and plasmonic metamaterials: analysis and applications*, World Scientific, 2012.
- [124] D.R. Smith, J.B. Pendry, M.C.K. Wiltshire, *Metamaterials and negative refractive index*, Science, **305** (2004), pp. 788–792.
- [125] M. Stockman, *Nanofocusing of optical energy in tapered plasmonic waveguides*, Phys. Rev. Lett., **93** (2004).
- [126] A.A. Sukhorukov, I.V. Shadrivov, Y.S. Kivshar, *Wave scattering by metamaterial wedges and interfaces*, Int. J. Numer. Model., **19** (2006), pp. 105–117.
- [127] A. Tip, *Linear dispersive dielectrics as limits of Drude-Lorentz systems*, Phys. Rev., **69** (2004).
- [128] B. Vial, *Étude de résonateurs électromagnétiques ouverts par approche modale. Application au filtrage multispectral dans l'infrarouge*, Thèse de Doctorat, École Centrale Marseille, 2013.
- [129] V. Vinoles, *Étude mathématique et numérique de phénomènes d'interface en présence de méta-matériaux* (titre provisoire), Thèse de doctorat, Université Paris-Saclay, 2016.
- [130] J. Viquerat, M. Klemm, S. Lantéri, C. Scheid, *Theoretical and numerical analysis of local dispersion models coupled to a discontinuous Galerkin time-domain method for Maxwell's equations*, Rapport de recherche INRIA, Équipe Nachos, 2013.
- [131] J. Viquerat, *Simulation de la propagation d'onde électromagnétique en nano-optique par une méthode Galerkin discontinue d'ordre élevé*, Thèse de Doctorat, Univeristé de Nice, 2015.
- [132] J. Vloka, *Partial Differential Equations*, Cambridge Univ. Press, 1987.
- [133] C. Weber, *A local compactness theorem for Maxwell's equations*, Math. Meth. Appl. Sci., **2** (1980), pp. 12–25.
- [134] A.V. Zayats, S.A. Maier, *Active plasmonics and tuneable plasmonic metamaterials*, John Wiley & Sons, Inc, 2013.
- [135] A.V. Zayats, I.I. Smolyaninov, A.A. Maradudin, *Nano-optics of surface plasmon polaritons*, Physics reports, **408** (2005), pp. 131–314.
- [136] S. Zouhdi, A. Sihvola, A.P. Vinogradov, *Metamaterials and plasmonics: fundamentals, modelling, applications*, Springer, Nato Science, 2008.
- [137] C.M. Zwölf, *Méthodes variationnelles pour la modélisation des problèmes de transmission d'onde électromagnétique entre diélectrique et méta-matériau*, Thèse de Doctorat, Université Versailles - Saint-Quentin, 2008.

**Titre :** Étude mathématique et numérique de structures plasmoniques avec coins.

**Résumé :** Dans cette thèse, nous nous intéressons à la propagation d'ondes électromagnétiques dans des structures plasmoniques, composées d'un diélectrique et d'un métal. Les métaux exhibent aux fréquences optiques des propriétés électromagnétiques inhabituelles comme une permittivité diélectrique négative, alors que les diélectriques possèdent une permittivité positive. Ce changement de signe de permittivité a pour conséquence la propagation d'ondes de surface (plasmons de surface) à l'interface métal-diélectrique. Cette thèse concerne le cas où cette interface présente des coins. Des études théoriques ont été menées ces dernières années, combinant la méthode de la T-coercivité et l'analyse des singularités de coins. En particulier, il a été mis en évidence l'existence de deux régimes, selon les paramètres du problème (fréquence, matériau, géométrie). L'objectif de cette thèse est de développer, dans le cas bidimensionnel, une méthode numérique stable pour chacun de ces deux régimes, en apportant un traitement spécifique aux coins. Dans le premier régime (où les solutions appartiennent à l'espace "d'énergie classique"), nous développons des règles de maillages adaptées à la géométrie de l'interface pour garantir la convergence optimale des méthodes d'approximation par éléments finis : on parle de maillages T-conformes. Dans le second régime (où les solutions ne sont plus d'énergie finie), nous proposons une méthode numérique originale utilisant des PMLs (Perfectly Matched Layers) aux coins pour capturer les singularités, appelées ondes de trou noir car elles transportent de l'énergie absorbée par les coins. Nous appliquons ces techniques numériques à deux problèmes physiques : la diffraction par une onde plane d'une inclusion métallique polygonale, et la détermination des modes guidés d'un guide d'ondes plasmonique à section polygonale. Pour le problème de diffraction, nous montrons que les coins de l'inclusion métallique peuvent absorber de l'énergie, transportée par les ondes de trou noir, et nous calculons numériquement l'énergie absorbée par chaque coin. L'étude des modes guidés du guide plasmonique quant à elle s'écrit sous la forme d'un problème de théorie spectrale non classique. En présence d'ondes de trou noir, les valeurs propres associées aux modes guidés sont plongées dans le spectre essentiel. Pour les dévoiler, on utilise à nouveau des PMLs aux coins, ce qui revient à calculer les valeurs propres d'un opérateur étendu dont le spectre est discret.

**Mots-clés :** plasmons de surface, T-coercivité, singularités, éléments finis, PML, théorie spectrale, équations de Maxwell.

**Title:** Mathematical and numerical study of plasmonic structures with corners.

**Abstract:** In this thesis, we investigate the propagation of electromagnetic waves in plasmonic structures, made of a dielectric and a metal. At optical frequencies metals exhibit unusual electromagnetic properties like a negative dielectric permittivity whereas dielectrics have a positive one. This change of sign allows the propagation of surface waves (called surface plasmons) at the metal-dielectric interface. This thesis is focused on the case where the interface presents corners. In the past decade theoretical studies have been carried out, combining results of the T-coercivity approach and the analysis of corner singularities. In particular it has been shown the existence of two states, depending on the parameters of the problem (frequency, material, geometry). The goal of this thesis is to develop, for the 2D case, a stable numerical method adapted to each state, with a specific treatment at the corners. In the first state (where the solutions belong to the function space of "classical energy") we develop meshing rules adapted to the geometry to guarantee the convergence's optimality of the approximation with the finite element method: we say that the meshes are T-conforming. For the second state (where the solutions are no longer of finite energy), we propose an original numerical method using Perfectly Matched Layers (PMLs) at corners to capture the singularities, called black-hole waves as they carry energy absorbed by the corners. These techniques are applied to two physical problems: the diffraction by a plane wave of a polygonal metallic inclusion, and the search of guided modes in a plasmonic waveguide with a polygonal cross-section. For the scattering problem, we prove that the corners of the metallic inclusion can trap energy carried by the black-hole waves, and we quantify numerically the amount of trapped energy by each corner. Concerning the study of guided modes of a plasmonic waveguide, the problem is a non standard spectral problem. In the presence of black-hole waves, the eigenvalues associated to the guided modes are embedded in the essential spectrum. We use again PMLs at the corners to reveal them. This consists in computing the eigenvalues of an extended operator with a discrete spectrum.

**Keywords:** surface plasmons, T-coercivity, singularities, finite element method, PML, spectral theory, Maxwell's equations.